

La movilización de la Competencia Matemática “Razonar y Argumentar” a través del estudio de la Media Aritmética

The mobilization of Mathematical Competence “Reasoning and Argument” through the study of Arithmetic Mean

Fecha de recepción: 31 de julio de 2015 / Fecha de aceptación: 14 de septiembre de 2015

Escrito por: Javier Andrés Acosta Narváez¹
Ricardo Hermosa Quintero²

Resumen

En este artículo se describe una investigación³ que se desarrolló en el marco del programa de Maestría en Ciencias de la Educación con Énfasis en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de la Amazonia, Florencia – Colombia, durante los años 2012 a 2014. La investigación contribuyó a la movilización de la Competencia Matemática “Razonar y Argumentar” (CMRA) asociándola al estudio del Objeto Matemático Media Aritmética (OMMA) en estudiantes de grado noveno (9°) de Educación Básica Secundaria (EBS). El marco conceptual se basó en la definición de competencia matemática “Razonar y Argumentar”, en los procesos matemáticos de acuerdo al estudio PISA 2012 y en tareas matemáticas contextualizadas. En este sentido, las tareas matemáticas estaban relacionadas con prácticas cotidianas del cultivo de café como la fertilización, la producción nacional y el consumo mundial. Debido a la naturaleza del problema, se guió la investigación a través de una metodología cualitativa. Como diseño metodológico se implementó un estudio de caso y para la recolección de la información se utilizó la observación participante, hojas de trabajo, grabaciones en audio y video, entrevistas semiestructuradas, diarios de campo y guías de observación. A través de una secuencia de tareas matemáticas propuesta a los estudiantes se logró identificar los procesos matemáticos que se desarrollaron durante su actividad matemática y la caracterización de las interacciones dialógicas mientras resolvían las tareas. Finalmente, se plantearon algunas consideraciones finales con respecto a los procesos matemáticos, las tareas matemáticas y las interacciones, se propusieron

Abstract

This article described a research was developed as a part of the Master Degree in Education Science Program, with an emphasis on Mathematics Didactics of the “Amazonia” University, Florencia – Colombia conducted from 2012 to 2014. This research contributed to the mathematical competence mobilization Reasoning and Argument (MCRA) and it also associated this competence to mathematical object arithmetic mean study (MOAM), in ninth graders. The conceptual framework is based on the reasoning and argument mathematics competence definition and the mathematical processes according to the PISA study carried out in 2012 and the contextualized mathematical tasks. In that sense, the mathematical tasks were related to coffee harvest daily practices such as fertilization, national production and the global consumption. Due to the nature of the problem, we developed this study by means of a qualitative methodology. We carried out a case study and we also used the participant observation, worksheet, audio and video recordings, interviews, field diary and observation guides as collecting data methods. Through a designed Mathematical Tasks Sequence that was proposed to the students, we could show the mathematical processes that were developed during the students’ mathematical activities and the characterization of dialogic interactions while they were carrying out tasks. Finally, we proposed some final thoughts conclusions with regard to mathematical processes, mathematical tasks, interactions, research and classroom.

¹ Magister en Ciencias de la Educación Énfasis en Didáctica de las Matemáticas. Docente de Matemáticas Básica Secundaria. Institución Educativa El Paraíso. Algeciras, Huila, Colombia. javandraco@hotmail.com

² Magister en Ciencias de la Educación Énfasis en Didáctica de las Matemáticas. Docente de Matemáticas Básica Secundaria. Institución Educativa El Salado. La Plata, Huila, Colombia. ricardohermosa@hotmail.com

³ Acosta y Hermosa (2014)





algunas implicaciones para el aula de clase y para la investigación.

Palabras clave: competencia matemática “Razonar y Argumentar”, interacciones, media aritmética, procesos matemáticos, tareas matemáticas.

Key Words: mathematical competence “Reasoning and Argument”, interactions, arithmetic mean, mathematical processes, mathematical tasks.

Resumo

Este artigo descreve o que foi desenvolvido no âmbito do programa de mestrado em educação com ênfase no ensino da matemática da Universidade da Amazônia, Florença - Colômbia, durante os anos de 2012-2014. A pesquisa contribuiu para a mobilização da Competição Matemática Raciocínio e Discutir (CMRA), associando-o com o estudo da aritmética média matemática objeto (OMMA) na nona série (9°) do ensino secundário básico (EBS). O quadro conceptual baseou-se na definição de competição matemática “Raciocínio e discutir”, matemáticas, de acordo com o PISA 2012 estudo de processos e tarefas de matemáticas contextualizadas. Neste sentido, as tarefas de matemáticas estavam relacionadas com as práticas cotidianas de café crescente como a fertilização, a produção nacional e consumo mundial. Devido à natureza do problema, a pesquisa é guiada através de uma metodologia qualitativa. Como a abordagem metodológica foi implementada um estudo de caso e para a recolha de informação utilizada observação participante, planilhas, gravações em áudio e entrevistas semi-estruturadas, vídeo, diários de campo e observação guias. Através de uma sequência de tarefas matemáticas propostas aos alunos foram capazes de identificar os processos matemáticos que desenvolveram durante sua atividade matemática e caracterização das interações dialógica enquanto eles resolveram as tarefas. Finalmente, levantou algumas considerações finais no que diz respeito a processos matemáticos, as tarefas de matemáticas e interações, propuseram-se algumas implicações para a sala de aula e para a pesquisa.

Palavras-chave: competição de matemática “razão e discutir”, interações, aritméticas dizer, processos matemáticos, as tarefas de matemáticas.

Introducción

El enfoque por competencias ha sido estudiado e implementado en el currículo de matemáticas mundialmente por diferentes proyectos tales como MAT₇₄₇ de Abrantes (2001) en Portugal, el proyecto KOM de Niss (2002) en Dinamarca, los proyectos DeSeCo y PISA de la OCDE (2003), Principios y Estándares para la Educación Matemática en Estados Unidos (NCTM, 2000) y el proyecto FONIDE (2011) en Chile.

En Colombia, se adoptó este enfoque por competencias matemáticas a través de los Estándares Básicos de Calidad (MEN, 2006) para todos los niveles educativos de Básica Primaria y Secundaria con el objetivo de lograr un aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas. A grandes rasgos, en las siguientes líneas se intentará hacer una descripción somera de la estructura de los Estándares Básicos de Competencias, señalando los aspectos más relevantes.

Aunque los estándares no hacen énfasis en el término “competencia matemática” porque no

proporcionan una definición o descripción de lo que podría significar este término, si hace una aproximación detallada de lo que es ser “matemáticamente competente”. De acuerdo con Gómez et al., (2014), para estos estándares ser matemáticamente competente contempla una visión epistemológica de las matemáticas (conocimiento conceptual) y una visión cognitiva del contenido matemático (conocimiento procedimental) y de esta manera ser matemáticamente competente se define en procesos generales que se encuentran en toda la actividad matemática: a) formular y resolver problemas, b) modelar procesos y fenómenos de la realidad, c) comunicar, razonar, y d) formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos; estos son los cinco procesos que están plenamente definidos en los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998).

De otra parte, ser matemáticamente competente se concreta de manera más específica en cinco pensamientos matemáticos: a) numérico, b) espacial, c) métrico, d) aleatorio y e) variacional (MEN, 2006, p. 56). En estos pensamientos está inmerso el contenido matemático escolar; es decir, los conocimientos

básicos que deben alcanzar los estudiantes a través de los procesos antes mencionados.

Los procesos y los pensamientos por sí solos, no contribuyen para que los estudiantes sean matemáticamente competentes, hace falta un ingrediente esencial que influye de manera directa sobre el aprendizaje y tiene que ver con el contexto. Para los estándares, así como para los lineamientos curriculares, el contexto es el lugar físico y sociocultural donde el estudiante construye el significado y sentido de las matemáticas que aprende permitiéndole establecer conexiones con la vida cotidiana, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas (MEN, 2006, p. 70).

Los aspectos antes mencionados y descritos en los documentos oficiales como los Estándares y los Lineamientos Curriculares emanados por el Ministerio de Educación Nacional fueron indispensables para esta investigación y algunos de ellos están acordes con los planteamientos conceptuales que se detallarán en el marco conceptual. Sin embargo, conforme a la experiencia como docentes y a las concepciones que se poseen sobre cómo movilizar o desarrollar competencias matemáticas, se observa la desarticulación de estos elementos en la planificación de la práctica educativa. Muchos profesores de matemáticas en Colombia no comprenden clara y concretamente el uso y la aplicación de estos estándares en el aula de clase más que para ajustar el plan de estudios, planificar las clases y elaborar materiales como guías y talleres. Si bien es cierto, se está sujeto a la normatividad oficial vigente expedida desde el MEN, hace falta una mayor concreción conceptual en las directrices educativas y en particular, en el dominio de herramientas prácticas necesarias para llevar a cabo la teoría en el aula de clase aplicada de manera natural y sin ambigüedades. Al respecto, Gómez, et al. (2014), manifiestan que;

...casi una cuarta parte de los profesores desconocen el documento de los estándares, y, para casi la mitad de ellos, el texto no es claro y presenta ambigüedades. Se constata que el documento se usa, en primera instancia, para la planificación de área, y pierde utilidad en la medida en que los profesores abordan la planificación de aula...En resumen, tres cuartas partes de los profesores conocen el documento de los estándares, lo usan especialmente para la

planeación de área y manifiestan dificultades a la hora de concretarlos para la enseñanza y la evaluación (p. 16).

Además, existen muchas otras razones por las cuales los profesores de matemáticas tienen dificultades para movilizar competencias matemáticas; tienen muchas responsabilidades y les falta tiempo, no entienden cómo iniciar el proceso, no saben qué es una competencia matemática, no poseen herramientas didácticas que permitan el avance de las competencias, entre otras. Surge de esta manera, un sin número de interrogantes difíciles de responder. Atendiendo a la importancia que representa el tema para la educación matemática, se planteó la siguiente pregunta central de investigación: ¿De qué manera los procesos matemáticos y las tareas matemáticas contextualizadas movilizan la competencia matemática Razonar y Argumentar en estudiantes de grado noveno a través del estudio de la media aritmética?

El propósito de la investigación fue aportar algunos elementos didácticos y metodológicos al progreso de las competencias matemáticas y en particular, a la movilización de la competencia matemática "Razonar y Argumentar". En este sentido, se asumió como objetivo general movilizar la competencia matemática "Razonar y Argumentar" en el estudio del objeto matemático media aritmética en estudiantes de grado noveno. Para lograr este objetivo se establecieron los siguientes objetivos específicos: a) identificar los procesos matemáticos, asociados con la competencia matemática "Razonar y Argumentar", que se desarrollan en la actividad matemática de los estudiantes; b) describir y caracterizar las interacciones en el aula de clase cuando se movilizan los procesos matemáticos en la resolución de tareas contextualizadas.

En consecuencia, en este trabajo de investigación se llevó a cabo la formulación e implementación de una secuencia de actividades basada en tareas matemáticas contextualizadas que contribuyeron a la movilización de la competencia matemática "Razonar y Argumentar".

Dicho estudio permitió establecer cuáles son aquellos aspectos de la competencia matemática "Razonar y Argumentar" que se promueven en los estudiantes cuando se enfrentan a una situación problemática que involucra el concepto de media aritmética. De otro lado, este artículo





se estructura en las siguientes partes: fundamentos teóricos, método, resultados y discusión y, conclusiones.

Fundamentos Teóricos

Para la fundamentación teórica se retomaron los conceptos de: competencia matemática; en particular de competencia matemática "Razonar y Argumentar" de acuerdo con el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA), las tareas matemáticas, niveles de demanda cognitiva de las tareas, los procesos matemáticos y el contexto:

- El Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) que hace parte de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), es un proyecto internacional en el que mediante pruebas escritas, cada 3 años a partir de 2000, se evalúa en qué medida los estudiantes de 15 años, de 65 países alrededor del mundo, están capacitados para aplicar sus conocimientos a situaciones reales y preparados para participar plenamente en la sociedad a la cual pertenecen (Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2013). Es importante notar que este proyecto europeo es de naturaleza evaluativa de los estudiantes de los países que hacen parte de la organización OCDE.

El proyecto PISA en su más reciente marco teórico de 2012 define la competencia matemática en términos de tres capacidades específicas; formular, emplear e interpretar. Esta definición, asumida para esta investigación, es la siguiente:

La competencia matemática es la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonar matemáticamente y el usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar, y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que juegan las matemáticas en el mundo y a realizar los juicios bien fundados y las decisiones que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos. (OECD, 2013, p. 4)

De otro lado, la competencia matemática Razonar y Argumentar (CMRA) también se asume a partir de los planteamientos del proyecto PISA (OECD, 2013), la cual se define de la siguiente manera:

Una habilidad matemática que se activa a lo largo de las distintas etapas y actividades asociadas a la alfabetización matemática se conoce como razonamiento y argumentación. Esta capacidad involucra procesos de pensamiento lógicamente arraigados que exploran y vinculan los elementos de un problema para hacer inferencias a partir de ellos, comprobar la justificación provista, o proporcionar una justificación de las declaraciones o de las soluciones a los problemas. (OECD, 2013, p. 30)

Esta definición permite notar que la competencia matemática Razonar y Argumentar es una habilidad o capacidad que se va desarrollando en la medida que los estudiantes se encuentran involucrados en la resolución de tareas matemáticas usando los procesos de: a) formulación, b) empleo y c) interpretación, que engloban la definición general de competencia matemática. Adicionalmente, permite observar algunos de los procesos matemáticos asociados con esta competencia como inferir, justificar y explicar, entre otros, para relacionarlos con las tareas y con la actividad matemática.

El marco conceptual se basó en la integración de tres elementos: las tareas matemáticas, los procesos asociados a la CMRA y el contexto, que se pueden apreciar en la figura 1

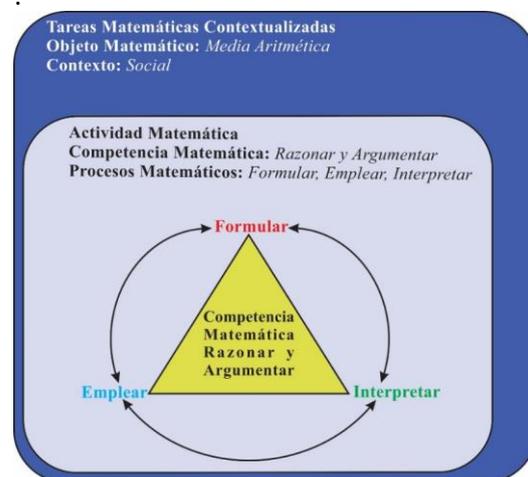


Figura 1. Modelo de CMRA

La figura 1 muestra que la actividad matemática es toda acción física o de pensamiento del estudiante que se genera mediante la ejecución de tareas matemáticas que apuntan hacia un determinado contenido y contexto. Así mismo, puede originar diferentes tipos de actividades matemáticas cuando se modifican las características de una cierta tarea.

- Las Tareas Matemáticas. Se refieren a un conjunto de problemas, investigaciones, ejercicios, proyectos, construcciones, aplicaciones, producciones orales, relatos, ensayos, escritos, entre otros, que el profesor le propone al estudiante para el desarrollo de su actividad matemática. En este sentido, el profesor es el encargado de elaborar y diseñar tales tareas, con el propósito de lograr una clase dinámica en el aula, éstas sean motivadoras y generen entusiasmo en el estudiante, al tener en cuenta sus conocimientos previos e intuiciones y la disposición que los estudiantes posean en un ambiente de aprendizaje del aula. Esta postura de Ponte, Boavida, Graça y Abrantes (1997) en relación a que la actividad matemática se genera durante la resolución de las tareas también se puede apreciar en el trabajo de Goñi (2011). Este último autor considera que las tareas matemáticas contribuyen a que se desarrolle la actividad matemática en los estudiantes. Es el profesor quien selecciona y diseña las tareas para ser vistas como instrumentos para el aprendizaje. Tanto para Abrantes como para Goñi las tareas planteadas al estudiante deben incluir de manera explícita los objetivos de aprendizaje que se pretenden alcanzar.

De igual forma, ambos autores enfatizan que una tarea matemática debe constituir una serie de características propias de los estudiantes tales como sus creencias, intereses y sus estilos de aprendizaje de las matemáticas. La anterior lista de aspectos apunta hacia una situación de aprendizaje y pone en juego un determinado contenido matemático para originar diversos tipos de actividades matemáticas. La situación de aprendizaje se enmarca dentro del contexto del mundo real que se nutre de un significado cotidiano en relación con la cultura del estudiante. Mientras que el contenido matemático alude a los hechos, conceptos, procedimientos e ideas matemáticas implicadas en la tarea para que proporcionen una buena oportunidad de involucrar al estudiante dentro de actividades matemáticas.

Algunas de las características y aspectos que debe tener en cuenta el profesor de matemáticas para el diseño y la selección de tareas matemáticas y de esta manera, dinamizar sus clases y lograr un aprendizaje de algún dominio matemático se resume en la Tabla 1 en la que se toman los planteamientos de los Estándares profesionales para la Enseñanza de las Matemáticas de la NCTM (1994) citados en Ponte, et al. (1997, p. 4):

Tabla 1. Características de las tareas matemáticas según NCTM (1994)

Características de las tareas matemáticas
<p>En la clase de matemáticas el profesor debería plantear tareas que estén basadas en:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Unas matemáticas significativas y razonables; ▪ El conocimiento de los intereses, experiencias y comprensión de los estudiantes; ▪ El conocimiento de los distintos modos en que aprenden los estudiantes. <p>Haciendo que</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Comprometa el intelecto de los estudiantes; ▪ Desarrolle la comprensión y destrezas matemáticas de los estudiantes; ▪ Estimule a los estudiantes a hacer conexiones y a desarrollar un marco coherente para las ideas matemáticas; ▪ Exija la formulación y resolución de problemas y el razonamiento matemático; ▪ Promueva la comunicación sobre las matemáticas; ▪ Presente las matemáticas como una actividad humana en desarrollo; ▪ Muestre sensibilidad y tenga en cuenta las diversas disposiciones y experiencias previas de los estudiantes; ▪ Promueva el desarrollo de las disposiciones para hacer matemáticas de los estudiantes.

- Niveles de Demanda Cognitiva de las Tareas. Al tomar como referencia a Turner (2012) y OECD (2013), en las tareas que requieran una activación muy baja de esta capacidad, el razonamiento exigido puede ser, sencillamente, seguir las instrucciones dadas. En un nivel de exigencia ligeramente superior, las preguntas requieren una cierta reflexión para asociar distintas informaciones con el fin de realizar inferencias (p. ej., relacionar distintos elementos presentes en el problema, o utilizar el razonamiento directo dentro de un aspecto del mismo).

En un nivel superior, los ejercicios requieren analizar la información para seguir o generar un argumento compuesto de varios pasos o relacionar distintas variables; o razonar a partir de fuentes de información afines. En un nivel de exigencia incluso mayor, es necesario sintetizar y valorar la información, utilizar o crear cadenas de razonamiento para justificar inferencias, o hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos y combinándolos de forma continuada y dirigida. En resumen, estos niveles de demanda cognitiva se catalogan de la siguiente manera:

- Nivel 0: hacer inferencias directas de la información y de las instrucciones dadas.





- Nivel 1: relacionar información con el fin de hacer inferencias, (por ejemplo, para conectar componentes separados presentes en el problema, o utilizar el razonamiento directo dentro de uno de los aspectos del problema).
- Nivel 2: analizar la información (por ejemplo para conectar varias variables) para seguir o crear un argumento de múltiples pasos; razonar a partir de fuentes relacionadas de información.
- Nivel 3: sintetizar y evaluar la información, utilizar o crear cadenas de razonamiento para comprobar o justificar inferencias, o para hacer generalizaciones sobre la base y la combinación de múltiples elementos de información de una manera continuada y dirigida.

- Los Procesos Matemáticos. Si bien es cierto que la actividad matemática se genera a partir de la participación del estudiante en una determinada tarea a través de su resolución, esta actividad es propia del estudiante y por lo tanto, es él quien desarrolla ciertos procesos asociados con la competencia que son transversales a los contenidos. Es de esta manera que la competencia matemática se desarrolla en el aula. Los procesos matemáticos que el estudiante pone en marcha cuando enfrenta determinadas tareas hacen parte de la actividad matemática. La relación que existe entre tareas y procesos matemáticos se puede apreciar en los planteamientos de Rico y Lupiáñez (2008);

Las tareas y procesos poseen características comunes en el sentido de que ambos expresan lo que espera que logren, desarrollen y utilicen los estudiantes. Expresan una petición de mejora y desarrollo, reclaman un incremento de la riqueza cognitiva de los estudiantes. Tareas y procesos se basan en conocimientos y actuaciones. Las tareas tienen tanto un carácter específico relativo a un contenido como unas actuaciones del estudiante sobre un contenido matemático concreto; los procesos, en cambio, integran y aplican diversos conocimientos, movilizan una mayor riqueza cognitiva del estudiante, incluyendo actitudes, y se pone en juego abordar tareas complejas en situaciones complejas. (Solar, 2009, p. 57)

Los procesos matemáticos están asociados al nivel cognitivo de los estudiantes. Enfrentado a una tarea el estudiante debe activar una secuencia de procesos, los cuales son: formulación matemática de las situaciones (PMF), empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos

(PME) e interpretación, validación y valoración de resultados matemáticos (PMI).

Para la competencia matemática Razonar y Argumentar se han identificado algunos descriptores de los procesos que integran esta competencia. Las tablas 2, 3 y 4 se elaboraron con base en la revisión de la literatura, principalmente de PISA (2012), MEN (1998, 2006), NCTM (2000) y FONIDE (2011) y describen el significado de cada proceso de manera específica a través de descriptores.

Tabla 2. Descriptores de la CMRA para el Proceso de Formulación

Proceso Matemático	Descriptores
PMF Formulación matemática de las situaciones.	DPMF-1 Formular hipótesis y conjeturas a partir de los datos provenientes de una situación problema.
Explicar, defender o proporcionar una justificación de la representación identificada o elaborada de una situación del mundo real.	DPMF-2 Examinar patrones y estructuras para detectar regularidades.
	DPMF-3 Explorar ejemplos y contraejemplos y plantear preguntas.
	DPMF-4 Usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
	DPMF-5 Representar la situación utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos estándar adecuados.
	DPMF-6 Explicar la representación matemática de la situación.

Tabla 3. Descriptores de la CMRA para el Proceso de Empleo

Proceso Matemático	Descriptores
PME Empleo de conceptos, datos, procedimientos, y	DPME-1 Justificar estrategias y procedimientos utilizados para la solución de situaciones problema.

Proceso Matemático	Descriptor
razonamientos matemáticos.	DPME-2 Explicar y justificar los resultados matemáticos obtenidos y reflexionar sobre los argumentos matemáticos.
Explicar, defender o facilitar una justificación de los procesos y procedimientos utilizados para determinar un resultado o solución matemática.	DPME-3 Aplicar datos, algoritmos y estructuras matemáticas en la búsqueda de soluciones matemáticas.
Relacionar datos para llegar a una solución matemática, hacer generalizaciones o elaborar un argumento de varios pasos.	DPME-4 Manipular números, datos, información gráfica, expresiones algebraicas y representaciones geométricas.
	DPME-5 Identificar una expresión matemática o modelo que represente una conjetura para generalizar propiedades y relaciones matemáticas.
	DPME-6 Elaboración de gráficos, diagramas y construcciones matemáticas para extraer información del problema.

Tabla 4. Descriptores de la CMRA para el Proceso de Interpretación

Proceso Matemático	Descriptor
PMI Interpretación, aplicación y valoración de resultados matemáticos.	DPMI-1 Reinterpretar la solución matemática en el contexto de la tarea para apoyarla o refutarla.
Reflexionar sobre las soluciones matemáticas y elaborar explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o proporcionen una solución matemática a un problema contextualizado.	DPMI-2 Interpretar y evaluar los argumentos utilizados para justificar la solución matemática del problema.
	DPMI-3 Reflexionar la coherencia de la solución o del resultado matemático con el contexto de la tarea.
	DPMI-4 Comprender el alcance de los conceptos y las soluciones matemáticas.

En las anteriores Tablas 2, 3 y 4, se describen los procesos matemáticos y los descriptores que me permiten mostrar la puesta en marcha de esos procesos. La distribución del orden de los procesos matemáticos corresponde a un orden aleatorio y no tienen que generarse estrictamente en el orden indicado en las tablas. Es decir, estos procesos no son lineales y no requieren de un orden específico para que se generen, esto quiere decir que un estudiante no requiere activar primero la formulación para luego pasar al empleo y finalmente a la interpretación.

- El Contexto. El contexto de la tarea determina en cierta medida el éxito de la resolución de las tareas matemáticas que se les propongan a los estudiantes. En esta investigación se hace énfasis en que las tareas matemáticas deben ser contextualizadas dentro de la sociedad y la cultura del estudiante. PISA (2013) define el contexto como uno de los aspectos importantes de la competencia matemática, y se presenta en términos de que los problemas o situaciones se deben plantear dentro de un contexto determinado. Al respecto manifiesta lo siguiente;

El contexto es aquel aspecto del mundo del individuo en el cual se encuentran situados los problemas. La elección de las estrategias y representaciones matemáticas adecuadas depende normalmente del contexto en el que se presenta el problema. La capacidad para trabajar dentro de un contexto se valora enormemente para asignar exigencias adicionales a quien resuelve el problema. (OECD, 2013, p. 23)

El estudio PISA plantea cuatro categorías donde se ubican los problemas y para esta investigación se ha tomado como punto de referencia uno de ellos; el contexto social, muy en concordancia con el planteado por los Estándares. Para PISA el contexto social es aquel que tiene que ver con la comunidad, ya sea a nivel local, nacional o global. Trata temas como como los sistemas electorales, el transporte, el gobierno, las políticas públicas, la demografía, la publicidad, las estadísticas nacionales y la economía (OECD, 2013, p. 24).

Método

El enfoque a través del cual se buscó responder a la pregunta de investigación formulada en el planteamiento del problema fue de orientación principalmente cualitativo con carácter





descriptivo – interpretativo. Se asumió el enfoque cualitativo de investigación como un camino flexible de carácter inductivo e interpretativo para explorar y describir las experiencias, vivencias, acontecimientos, situaciones y significados de los participantes tal y como fueron o son vividas por ellos valiéndose del lenguaje verbal y no verbal, escrito y visual (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Por consiguiente, la decisión de seleccionar el enfoque cualitativo se realizó a partir de las estrategias utilizadas para la movilización de la competencia matemática Razonar y Argumentar, dado que con éstas se puede obtener la comprensión de los significados, la puesta en marcha de procesos y la comunicación de los estudiantes basada en interacciones sociales entre pares.

Dentro del contexto de la investigación en el aula, se utilizó como diseño metodológico el estudio de caso. Según Tojar (2006), el estudio de caso es una investigación descriptiva, exhaustiva y en profundidad de un caso, ya sea simple o múltiple como lo propone Yin (2009). Se trata de descubrir e identificar los significados, sus orígenes, dificultades o fortalezas y las trayectorias de los mismos.

- El diseño metodológico. Se realizó en cuatro momentos. Durante el primer momento se elaboró una unidad didáctica basada en tareas matemáticas, de acuerdo con los procesos matemáticos y el contexto social de los estudiantes. En el segundo momento, se realizó el trabajo de campo que consistió en la implementación de la primera tarea de la unidad didáctica. En el tercer momento, se hizo la organización y análisis de los datos. En el cuarto momento, se conformó la propuesta didáctica final y se desarrollaron las conclusiones y recomendaciones de la misma.

- Los Sujetos Participantes. La selección de los participantes se hizo, en primera instancia, mediante el muestreo de voluntarios (Hernández, Fernández y Baptista, 2010); es decir, la mayoría de los estudiantes mostraron interés y voluntad en participar de la investigación. En tal sentido, la prueba piloto se aplicó a ocho estudiantes de grado noveno de Educación Básica Secundaria (estudiantes entre 13 y 15 años).

La investigación se realizó en la Institución Educativa Los Negros Sede Principal del

municipio de Algeciras en el departamento del Huila, Colombia. Esta institución es pública, catalogada como rural ya que se encuentra ubicada en una zona alejada de la municipalidad, su población es de vocación principalmente campesina y su sustento económico más importante es la siembra, la recolección, el secado y comercialización del café. Muchos de los estudiantes y sus familias trabajan con actividades relacionadas con el cultivo de este producto.

En esta investigación se elaboró una secuencia de actividades según el contexto social del estudiante. La secuencia estuvo compuesta por tres tareas matemáticas en las cuales cada una de ellas se basó en los tres tipos de contexto social establecidos por PISA:

- Contexto Local: la fertilización del cultivo de café.
- Contexto Nacional: la producción de café en Colombia.
- Contexto Global: el consumo mundial de café.

- Técnicas e instrumentos para la recolección de datos. Debido a que esta investigación fue primordialmente de corte cualitativo, se utilizó uno de los procedimientos más importantes y relevantes de este enfoque; la múltiple técnica; esto significa que se puede utilizar y manejar una gran diversidad de procedimientos e instrumentos para la recolección de los datos. Algunos investigadores como Borba y Araújo (2004), Yin (2009) y Hernández, Fernández y Baptista (2010), destacan la importancia de esta gran diversidad de procedimientos para dar una base amplia a la interpretación de los resultados de la investigación, donde es importante valorar cualquier detalle o situación que surja durante el proceso de recolección y análisis de la información.

En este marco, se consideró necesaria la utilización de la observación participante y la entrevista semiestructurada para registrar las respuestas y soluciones matemáticas y no matemáticas, diferencias, alternativas y dificultades para enriquecer los procesos individuales con la interacción grupal de la resolución de la situación o las situaciones planteadas.

- Análisis de la información. Según lo planteado por Álvarez-Gayou (2003), para iniciar el análisis de los datos recogidos se tuvo en cuenta los

objetivos del estudio, ya que son la guía del análisis de la investigación. Por consiguiente, para evidenciar la movilización de la competencia matemática Razonar y Argumentar es importante tener en cuenta cuáles fueron los procesos que los estudiantes llevaron a cabo y cómo son las interacciones que se generaron mientras los estudiantes resolvían las tareas matemáticas.

En este sentido, las unidades de análisis son aquellos episodios video-grabados y las producciones escritas de los estudiantes que les permitieron a los investigadores dar cuenta de dicha movilización de la competencia. Para analizar la información se realizó una interpretación y un análisis detallados de la información dada por los estudiantes participantes para realizar una sistematización, codificación y categorización según Strauss y Corbin (2002). En este sentido, la reducción de datos según Rodríguez, Gil y García (1996), consiste en la simplificación, resumen y selección de la información para hacerla abarcable y manejable. Según Hernández, Fernández y Baptista (2010), el análisis de los datos bajo el enfoque cualitativo radica en reducir, categorizar, clarificar y comparar la información con el propósito de visualizar lo más completo posible la realidad del objeto de estudio.

Una vez hecho el registro y la categorización de la información, se procedió a elaborar una triangulación por medio de técnicas de recolección de datos. Según Strauss y Corbin (2002) en este proceso de triangulación se realizan los siguientes pasos:

- Seleccionar la información obtenida de la recolección de los datos
- Triangular la información por cada categoría en este caso, los procesos de la competencia matemática Razonar y Argumentar.
- Triangular la información entre todos los aspectos de la investigación.
- Triangular la información con los datos obtenidos mediante los otros instrumentos, y
- Triangular la información con el marco conceptual.

Después de este proceso, se obtuvieron algunos resultados parciales o patrones de datos por cada categoría.

Resultados y Discusión

Para el análisis de los resultados presentados en este artículo se tuvo en cuenta la escogencia de tres preguntas, una por cada tarea, las cuales se han denominado P4-T1, P3-T2 y P2-T3:

- Respecto a P4-T1. La pregunta P4-T1 exige que el estudiante desarrolle la capacidad de análisis y argumentación para crear una serie de justificaciones y argumentos que lleven a dar una respuesta coherente del ejercicio, lo cual significa que el nivel de demanda cognitiva es (2). Es decir, el estudiante al resolver esta pregunta debe analizar la información y dar una respuesta donde relaciona y razona dicha información para crear argumentos sólidos y coherentes. La pregunta se expresó como se indica en la figura 2:

En la información suministrada en el empaque del fertilizante se encuentra esta frase:

Para cultivos de 5000 árboles por hectárea, la dosis oscila entre 240g y 480g por árbol al año”.

El caficultor piensa que la cantidad media de fertilizante que aplicó a los 50 árboles es de 278g porque esta cantidad está dentro del rango que dice la etiqueta del empaque. ¿Cree que el caficultor tiene razón o está equivocado? Justifique la respuesta.

Figura 2. Pregunta 4 de la Tarea 1 (P4-T1)

Fuente: elaboración propia.

El análisis para este ítem se hizo a través de un episodio video-grabado, el cual muestra las interacciones dialógicas entre el investigador y dos estudiantes:

[1] Investigador: ¿Y cómo es el promedio?

[2] Yeison: De 240 y 480.

[3] Sharon: O sea se suma 240 más 480 y se divide por dos y da 360, por eso no es un promedio, pero si puede estar en el rango que él justifica lo que dijo, entonces sí puede que tenga cierta razón.

[4] Investigador: Y si les dicen a ustedes ¿cuál es la media de esos datos? ¿De qué media estamos hablando?

[5] Sharon: ¿De media aritmética? [Responde en forma de pregunta al profesor]

[6] Investigador: De media aritmética. [Afirma que se trata de media aritmética]

[7] Sharon: ¿Sí? ¡Entonces sí es el promedio, entonces el señor está mal!

[8] Yeraldin: ¿Por qué?

[9] Sharon: Porque él habla de la media y mire vea ahí dice: “El caficultor piensa que la cantidad media del fertilizante que aplicó a los 50 árboles es de 278 porque





esta cantidad está dentro del rango que dice la etiqueta del empaque” [Lee de su hoja]. O sea él justifica bien, la cantidad está dentro del rango de la etiqueta del empaque, pero no es una media, porque la media de este rango sería 360, io sea que me quedó mal la respuesta!

En este diálogo con los estudiantes, se evidencia que la competencia matemática Razonar y Argumentar se pone de manifiesto a través de sus tres procesos fundamentales. Los estudiantes, después de formular el problema de forma matemática a través de PMF, justificaron y explicaron los procesos y procedimientos utilizados para determinar una solución matemática conforme lo establece el proceso PME al resolver la pregunta. En las líneas [2] y [3] hay una muestra de procesos matemáticos, cuando ante la pregunta del investigador para saber cómo obtuvieron el promedio, Yeison con una explicación poco clara y resumida, pero con conocimiento, demuestra que el procedimiento para obtener el valor promedio consiste en utilizar 240 y 480. Mientras que Sharom a través de una argumentación más elaborada logró justificar el procedimiento para encontrar el promedio. Además en la línea [9], Sharom expone sus ideas para refutar la afirmación del caficultor mediante sólidos argumentos al contrastar su resultado con el contexto de la tarea movilizand

- Respecto a P3–T2. La pregunta P3–T2 estaba relacionada con la representatividad, una de las propiedades estadísticas de la media aritmética y, orientaba hacia la argumentación estudiantil sobre si la cantidad dada es representativa o no de la producción de café para el periodo 1997–2002 y analizaran la coherencia de la respuesta. En este sentido, la pregunta tenía un nivel de dificultad (3) porque en caso de que la cantidad no fuera representativa, el estudiante debía argumentar la forma como haría para hallar una cantidad representativa. La pregunta se formuló como se señala en la figura 3:

Observe la tabla que contiene la producción de café en Colombia desde el año 1997 hasta el año 2002.

PRODUCCIÓN DE CAFÉ COLOMBIA	
(MILLONES DE SACOS 60 KILOS)	
AÑO	PRODUCCIÓN
1997	10.7
1998	12.7
1999	9.1
2000	10.6
2001	10.9
2002	11.6

En el año 1999 se produjo 9.1 millones de sacos de café de 60 kg, ¿Cree que esta cantidad es representativa del comportamiento de la

producción de café para este periodo de tiempo? ¿O cuál cantidad de café representa mejor la producción para este periodo? Justifique su respuesta.

Figura 3. Pregunta 3 de la Tarea 2 (P3-T2)
Fuente: elaboración propia.

Para algunos de los estudiantes lo representativo se asocia a lo que más se repite, incluso, dijeron que se trataba de la moda. Sin embargo, para otros estudiantes, la cantidad 9.1 no es representativa de ese periodo de tiempo, por lo que indicaron que a través de la media aritmética se podría calcular una cantidad más representativa. Esto se evidencia por el hecho de que algunos manifestaron que “se suman todos los datos y se divide por la cantidad de datos”. También se evidencia que algunos estudiantes no están muy familiarizados con el término media aritmética. El estudiante David activó los descriptores DPMF–1, DPMF–4, DPME–2, DPME–3 y DPME–5 proporcionó una explicación de por qué 9.1 no es la cantidad representativa. Él hace alusión a que es la cantidad “menor de todas” y que en este caso “no es la moda”. Además manifestó que 10.9 es la cantidad buscada. En la figura 4, se muestran los descriptores de procesos activados por David a P4-T1:

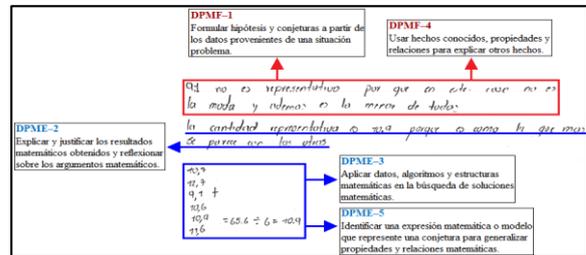


Figura 4. Descriptores de procesos activados por David a P4-T1
Fuente: elaboración propia

De igual manera, Alejandro, razonó: “porque es la que más se parece”, en alusión a que la mayoría de los datos empiezan con 10 y solo se diferencian en la cifra de la décima.

- Respecto a P2–T3. La pregunta P2-T3 tenía por objetivo determinar un conjunto de datos para los cuales su cantidad media sea 2.4. A partir de algunos datos dados en la situación – problema los estudiantes debían encontrar los faltantes de tal manera que justificando la solución a la pregunta creando una serie de argumentos coherentes sintetizara y evaluara la información

para hacer deducciones. Es por esto que la pregunta tiene un nivel de demanda cognitiva (3). La pregunta se expresó como se indica en la figura 5:

Una familia holandesa está conformada por 5 personas; Nicko, Eva, Sophie, Peter y Suzan.

Nombre	Cantidad de tazas de café al día
Eva	
Nicko	3
Sophie	
Peter	
Suzan	1.5

Si Nicko se toma 3 taza de café al día y Suzan se toma 1.5 tazas diarias. ¿Cuántas tazas de café podrían tomarse las otras 3 personas para que la media de tazas de café al día de las 5 personas sea 2.4? Justifique su respuesta.

Figura 5. Pregunta 2 de la Tarea 3 (P2-T3)

Fuente: elaboración propia.

Todos los estudiantes empezaron a hacer cálculos tanto en su hoja de trabajo como en la calculadora. Implementaron una técnica que se podría catalogar como ensayo-error que consistió en que ensayando la aplicación de una serie de operaciones aritméticas con diferentes números poder encontrar cuales de estos números "sirven" para que la cantidad media fuera de 2.4. La mayoría de los estudiantes realizó este procedimiento de manera individual salvo Alejandro y David que trabajaron conjuntamente.

Después de un tiempo considerable en el que los estudiantes respondieron a la pregunta, usando la calculadora, borrando lo que escribieron, volviendo a escribir y pensando en maneras de encontrar los valores, el investigador sostiene la siguiente discusión con algunos estudiantes con la intención de indagar sobre el trabajo que realizaron en esta pregunta:

[54] Investigador: Alejandro, entonces ¿la suma cuánto le dio?

[55] Alejandro: Dos punto cuatro.

[56] Investigador: ¿Cuánto tiene que dar la suma?

[57] Estudiantes: ¡Doce! [Varios estudiantes respondieron doce (12)]

[58] Investigador: O sea que la suma tiene que dar doce.

[59] Karen: Si ¡Claro!

[60] Investigador: Y si al 12 lo dividimos entre...

[61] Karen: ¡Cinco!

[62] Investigador: Va a dar dos punto cuatro.

[63] Investigador: Y ¿Cuál fue el método que ustedes usaron para resolver la pregunta?

[64] Karen: ¡Adivinanza! [Risas]

[65] Natalia: Pues uno, este no sirvió, este no sirvió, sigámosle, sigámosle... [Imitando en su calculadora]

[66] Sharom: Alrededor de números cercanos a dos punto cuatro... números cercanos a dos punto cuatro se ubican ahí para sumarse y dividirse.

[67] Investigador: ¿Qué valores puso?

[68] Sharom: dos, dos y tres punto cinco [2, 2, 3.5]

Se puede observar en esta discusión que aunque la mayoría de los estudiantes (línea [57]) acertaron en que la suma de los cinco valores debía ser doce para que la cantidad media sea de 2.4, el procedimiento que utilizaron no es muy explícito, es decir, estos estudiantes hicieron varias conjeturas y utilizaron hechos que sabían de antemano para encontrar la respuesta al ejercicio; es decir, activaron los descriptores de procesos DPMF-1 y DPMF-4, además de DPME-1; para explicar y justificar el procedimiento con el cual obtuvieron la respuesta. Ante la pregunta del investigador sobre cuáles fueron los métodos o procedimientos que los estudiantes utilizaron para encontrar las cantidades de tal manera que su cantidad media sea 2.4, todos los estudiantes recurrieron al método de ensayo y error, o como ellos mismos manifiestan ¡adivinando! Por medio de este método, Sharom, y otros compañeros, usaron además la estimación, según lo manifestado por ella, colocó valores cercanos a 2.4 (línea [66]) para sumarlos y luego dividirlos.

En la figura 6 se puede observar su respuesta:

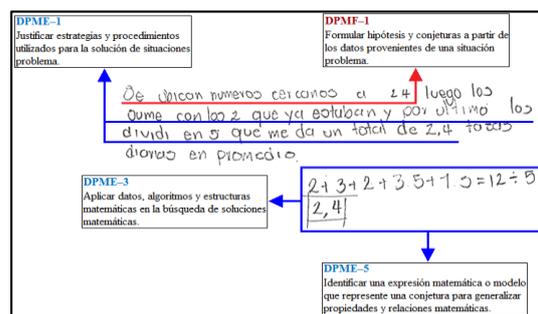


Figura 6. Descriptores de procesos activados por Sharom a P2-T3

Fuente: elaboración propia

A través de los descriptores de cada proceso se ha podido evidenciar la movilización de la Competencia Matemática Razonar y Argumentar





– CMRA – en el trabajo de los estudiantes y en las interacciones que se establecieron entre ellos. Los episodios y las representaciones verbales y escritas analizadas muestran cómo los estudiantes ante una tarea matemática, muy coherente conforme al contexto social, argumentan la formulación en términos matemáticos de una situación, justifican la utilización de procedimientos, razonamientos y herramientas matemáticas para solucionar una situación y utilizan series de argumentos sólidos para refutar o defender la solución a la tarea.

La motivación que se generó en los estudiantes es de naturaleza intrínseca, en el sentido que fueron impulsados por su propia búsqueda de conocimiento; además, participaron activamente durante el desarrollo de la tarea con un notorio sentido de éxito. Es decir, los estudiantes obtuvieron una solución satisfactoria de la tarea de acuerdo a sus propios criterios y estrategias, con persistencia, interés y autonomía. Además, esta motivación se obtuvo por el hecho de llevar al aula de clase y aplicar una tarea relacionada con el mundo real de los estudiantes. Específicamente, del contexto social relacionado con un aspecto de la agricultura como lo es la fertilización del cultivo de café, la producción nacional de café y el consumo mundial de tazas de café.

Con esta investigación se pudo comprobar que las interacciones sociales son fuente primordial para promover aspectos metacognitivos y volitivos en los estudiantes. De hecho en una de las entrevistas realizadas a los estudiantes, se pudo observar, que al resolver tareas matemáticas contextualizadas, algunos factores motivacionales y de gusto por las matemáticas tuvieron un espacio importante y emergente en esta investigación. Los estudiantes manifestaron que este tipo de tareas matemáticas son las que se deberían llevar al aula de clase porque se establecieron conexiones entre las matemáticas y su entorno social y cultural y además, como ellos mismos dijeron, “nos ponen a pensar”.

En estas interacciones se acentúa la motivación de los estudiantes, la persistencia para lograr objetivos, la disposición positiva hacia las matemáticas, el gusto por lo que ellos hacen y la autonomía cuando a través de sus propios razonamientos y argumentaciones son capaces de explicar y justificar el trabajo realizado al resolver la tarea matemática propuesta. Se hizo evidente el deseo de superación y la capacidad

de los estudiantes para poner en juego su actividad matemática expresada mediante procesos matemáticos.

Conclusiones

El resultado más importante que se obtuvo de toda esta investigación es acerca de la implementación de tareas matemáticas en el aula de clase. Por medio de una secuencia didáctica, movilizó de manera considerable algunos procesos matemáticos asociados con la competencia matemática Razonar y Argumentar. De esta manera se evidencia que la CMRA, objeto de estudio de esta investigación, se movilizó.

Respecto a los procesos matemáticos, la comprobación de la movilización de procesos matemáticos tales como la formulación matemática de la situación (PMF), el empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos (PME) y la interpretación, aplicación y valoración de resultados matemáticos (PMI); se hizo con base en las acciones, procedimientos, explicaciones verbales o escritas que los estudiantes manifestaron al resolver la tarea.

Referente a las tareas matemáticas, si éstas son contextualizadas contribuyen no sólo al avance de la CMRA sino que además influyen en la motivación del estudiante. En este sentido, la tarea diseñada buscó acercar un contenido matemático específico como lo es el OMMA con el contexto social de los estudiantes para que logren dar sentido a las matemáticas y así de esta manera fomentar la motivación y el gusto por ellas.

Con relación a las interacciones de los estudiantes, es posible identificar que algunos procesos como la comunicación, también se ponen de manifiesto cuando los estudiantes interactúan con sus compañeros e investigador; en especial, cuando razonan, argumentan, explican y describen procedimientos, formulan, representan e interpretan y validan resultados matemáticos. Para la movilización de la CMRA, este tipo de interacciones juegan un papel importante porque los estudiantes muestran el interés por compartir e intercambiar información, debatir diferentes puntos de vista, fomentar el trabajo colaborativo para alcanzar metas y construir la capacidad de reflexión y crítica para tomar decisiones acertadas reconociendo el rol de las matemáticas en el

mundo y en particular, de su entorno más cercano.

Referencias Bibliográficas

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 125-1443.

Acosta, J., y Hermosa, R. (2014). La Movilización de la competencia matemática "razonar y argumentar" a través del estudio de la media aritmética. Tesis de maestría no publicada, Universidad de la Amazonia, Florencia.

Álvarez-Gayou, J. L. (2003). Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología. México: Paidós.

Borba, M. C., y Araújo, J. L. (2004). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Caraballo, R. M., Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2013, Mayo-Agosto). Cambios conceptuales en el marco teórico competencial de PISA: El caso de las matemáticas. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 17(2), 225-241.

FONIDE. (2011). Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM). Chile: Ministerio de Educación.

Gómez, P., Castro, P., Mora, M., Pinzón, A., Torres, F., y Villegas, P. (2014). Estándares básicos de competencias. Comparación con el estudio PISA y cuestiones para su ajuste. Bogotá: Universidad de los Andes,

Goñi, J. M. (2011). Didáctica de las matemáticas. GRAÓ.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. d. (2010). Metodología de la Investigación (Quinta ed.). México: Mc Graw Hill.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares: Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. Roskilde University, IMFUFA.

OCDE. (2003). Marco Teórico de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas. Madrid: Santillana.

OECD. (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy. OECD Publishing.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., y Abrantes, P. (1997). Capítulo 4: Funcionamiento de la clase de matemáticas. In *Didáctica da matemática* (P. Flores, Trans.). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2008). Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Madrid: Alianza Editorial.

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. México: Ediciones Aljibe.

Solar, H. (2009). Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Bellaterra.

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: CONTUS-Editorial Universidad de Antioquia.

Tojar, J. C. (2006). La Investigación Cualitativa: Comprender y Actuar. Madrid: La Muralla.

Turner, R. (2012). Some drivers of test item difficulty in mathematics. Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), (pp. 13-17). Vancouver.

Yin, R. (2009). Case Study Research: Design and Methods (4 ed.). United States of America: SAGE Publications.

