Tareas matemáticas, ambientes de aprendizaje: movilización niveles de complejidad, competencia matemática comunicar

Tasks math, learning environments: mobilisation levels of complexity, competition math communicaten

Fecha de recepción: 2 de abril de 2015 / Fecha de aceptación: 16 de junio de 2015

Escrito por: Wilder Pastor Murcia Artunduaga [9]
Carolina Perdomo Navarro[10]

Resumen

Esta investigación es una contribución para promover la Movilización de los Niveles de Complejidad de la Competencia Matemática Comunicar (CMC), a partir de la selección, adaptación, construcción e implementación de tareas significativas. Dichas tareas no se relacionan únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucran aspectos de orden afectivo, meta-cognitivos y social, asociados a experiencias y culturas individuales. Este trabajo se realizó con la metodología de estudio de casos, se organizaron en el grado noveno, equipos de trabajo de a cuatro educandos. Este método de trabajo enriquece la negociación y construcción de significados matemáticos en el aprendizaje de la semejanza de triángulos. Desde esta visión se pusieron en evidencia ciertas dinámicas en las que se manifiesta la movilización de los Niveles de Complejidad de la CMC, como de sus aspectos característicos. Las tareas matemáticas que fueron implementadas se denominan: la feria y calculando una altura difícil de medir. En los resultados de algunos episodios de las sesiones de trabajo de dos ambientes de aprendizaje, se develó que aprender matemáticas es una construcción discursiva sujeta a la necesidad de participar, socializar e

Abstract

This investigation is a contribution to promote the Mobilization of the Levels of Complexity of the Mathematical Competition (CMC) to report, from the selection, adjustment, construction and implementation of significant tasks. The above mentioned tasks do not relate only to cognitive aspects, but they involve cognitive aspects of affective order, goal-cognitive and social, associated with experiences and individual cultures. This work was realized by the methodology of study of cases, they were organized in the ninth degree, equipments of work of to four pupils. This method of work enriches the negotiation and construction of mathematical meanings in the learning of the similarity of triangles. From this vision they put in evidence certain on dynamics in that demonstrates the mobilization of the Levels of Complexity of the CMC, as of his typical aspects. The mathematical tasks that were implemented name: the fair and calculating a height difficult to measure. In the results of some episodes of the meetings works of two environments of learning, develó that to learn mathematics is a discursive construction subject to the need to take part, to socialize and to interact intersubjectively. In the conclusions

[9] Magíster en Educación. Profesor del Colegio María Inmaculada del Doncello, Caquetá. wilderpma@hotmail.com
[10] Magíster en Educación. Profesor del Colegio María Inmaculada del Doncello, Caquetá. caroperdomo0180@hotmail.com

interactuar intersubjetivamente. En las conclusiones se muestra la importancia de establecer descriptores en la cualificación de los niveles de complejidad de la Competencia Matemática respecto: a) las actuaciones de los estudiantes en el desarrollo de las tareas que se les plantean; b) crear ambientes de aprendizaje que generen espacios de participación y colaboración en el que aprecien actitudes y valores, para favorecer el desarrollo de los propósitos de mejoramiento de los aprendizajes de los conceptos asociados al objeto matemático en estudio y, c) contextualizar el aprendizaje de las matemáticas a partir de la implementación de tareas, lo cual implica desarrollarlas en un contexto real y familiar para el estudiante.

Palabras claves: Competencia Matemática Comunicar, tarea matemática, Ambientes de Aprendizaje, niveles de complejidad. Descriptores de competencia, Evaluación del nivel de complejidad de competencia.

there appears the importance of establishing describers in the qualification of the levels of complexity of the Mathematical Competition I concern: a) the actions of the students in the development of the tasks that appear them; b) to create environments of learning that generate spaces of participation and collaboration in that they estimate attitudes and values, to favour the development of the intentions of improvement of the learnings of the concepts associated with the mathematical object in study and, c) contextualizar the learning of the mathematics from the implementation of tasks, which implies developing them in a royal and familiar context for the student.

Key Words: Mathematical Competition Communication, mathematical task, Environments of Learning, levels of complexity. Describers of competition, Evaluation of the level of complexity of competition.

Resumo

Esta pesquisa é uma contribuição para promover a mobilização dos níveis de complexidade da competição matemática comunica (CMC), desde a seleção, adaptação, construção e implementação de tarefas significativas. Essas tarefas não são apenas aos aspectos cognitivos, eles envolvem aspectos meta-cognitivas, afetivos e sociais, associados com experiências e culturas individuais. Este trabalho foi realizado com a metodologia de estudos, foram organizados no nono, equipes de quatro estudantes grau. Este método de trabalho enriquece a negociação e a construção de significados matemáticos na aprendizagem da semelhança de triângulos. Deste ponto de vista estavam em evidência certa dinâmica em que a mobilização dos níveis de complexidade da CMC, manifesta-se como seus traços característicos. As tarefas de matemáticas que foram implementadas são referidas como: a feira e calcular um difícil de medir a altura. Nos resultados de alguns episódios dos dois ambientes de aprendizagem trabalhando sessões, foi revelado que aprender matemática é uma construção discursiva sujeito a necessidade de participar, socializar e interagir intersubjetivamente. Os resultados mostra a importância de estabelecer descritores na qualificação de níveis de complexidade da competição matemática a respeito: a) as ações dos alunos no desenvolvimento das tarefas que surgem a partir deles; b) criar ambientes de aprendizagem que geram espaços de participação e colaboração em que apreciam atitudes e valores, para promover o desenvolvimento dos objectivos de melhoria da aprendizagem dos conceitos associados com o objeto matemático em estudo e, c) contextualizar o aprendizado da matemática, da execução das tarefas, que significa a desenvolvê-las em um contexto real e familiar para o aluno.

Introducción

A nivel internacional, la preocupación por formar personas capaces de comunicar matemáticamente se ha hecho saber a través de las declaraciones de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, OCDE, (2006). En estas declaraciones se afirma que la Competencia Matemática Comunicar permitirá la formación de ciudadanos críticos y reflexivos, puesto que la tendencia dominante apunta a que cada vez serán más los trabajos que requieran la capacidad de comprender, comunicar, utilizar y explicar conceptos y procedimientos basados en el pensamiento matemático. Como lo menciona Lee (2010), citado por Arévalo (2012):

> El problema pasa entonces por la necesidad de formar ciudadanos competentes y reflexivos capaces de comprender, comunicar, utilizar y explicar conceptos y procedimientos basados en el pensamiento matemático. De ahí la importancia del incremento del discurso matemático en el aula ya que su práctica aumenta el potencial de los alumnos para aprender matemáticas y el de los profesores para ayudarles a aprender (p.9).

Resulta razonable, por lo tanto, pensar que todos los estudiantes deberían tener la oportunidad y el necesario apoyo para aprender a comunicar matemáticamente, mediante la utilización de conceptos matemáticos importantes con profundidad y comprensión a partir de escenarios y actividades que contribuyan a movilizar los Niveles de complejidad de la CMC.

En ésta investigación se evidencia la importancia de seleccionar, adaptar, construir e implementar tareas matemáticas de manera tal que se conviertan en el nexo comunicativo entre estudiantes y profesor – estudiantes, para promover así, la movilización en los escolares de los Niveles de Complejidad de la CMC; no sólo en los saberes y conocimientos matemáticos, sino también, aspectos afectivos, meta-cognitivos y sociales; para formar personas más reflexivas y críticas al momento de solucionar una situación que emerja de su contexto.

Esto significa que las tareas propuestas por el docente se deben convertir en Ambientes de Aprendizaje en los estudiantes. Implica proponer tareas que vayan más allá de la reproducción de un saber (ya sea teórico o algorítmico). Tareas que logren que los escolares expresen de manera oral y/o escrita argumentos y justificaciones coherentes y adecuadas dando evidencia de procesos de comprensión y reflexión cuando conectan un conocimiento con otro o cuando a partir de un proceso social, se comparte y negocia significado matemático y que, desde la base comunicativa se dé la creación de un discurso orientado a concertar las diferentes subjetividades presentes en el aula y por ende, se comparta el significado matemático.

En los referentes teóricos que dieron las bases conceptuales para la realización de este trabajo, se plantean aspectos sobre los siguientes tópicos: a) mediadores de la competencia matemática b) competencia matemática y en particular, c) la competencia matemática comunicar. Así mismo se describe cada uno de los componentes de la competencia Matemática y de sus aspectos característicos:

- *Mediadores de la Competencia Matemática*. Como esta investigación no se centra sólo en el saber matemático en sí, porque realmente los contenidos van a ser los mediadores para promover los Niveles de Complejidad de la Competencia Matemática, debido a que el interés va a estar presente en la formación del ser humano que aprende matemáticas para que, en este caso, sus capacidades evidencien el desarrollo de tres aspectos claramente diferentes y absolutamente complementarios, son ellos

- el cognitivo: conocimiento de la disciplina,
- el afectivo: disposición, voluntad, deseo de responder a una determinada solicitud (externa o interna) y,
- la tendencia de acción: persistencia, continuidad, dedicación (D'Amore, Godino, & Fandiño, 2008, p.44).

En este trabajo se asume desde el aspecto cognitivo los procesos matemáticos: *leer*, *comprender* y *la actividad discursiva*.

Desde el aspecto afectivo los componentes: *disposición* y *deseo* para realizar la actividad matemática de aprendizaje y en el aspecto de la tendencia de acción el proceso de la *dedicación*.

Así mismo, se asume la definición de semejanza de Lemonidis (1991) citado por Castro y Céspedes (2009), quien afirma que para lograr una aproximación al concepto de semejanza se deben tener en cuenta dos momentos distintos:

- ***La relación intrafigural:*** *correspondencia de elementos de una figura.* Cuando las figuras forman parte del Teorema de Tales, en la que se consideran los aspectos de proyección y homotecia con sus correspondientes razones.

- ***La transformación geométrica:*** Aplicación del conjunto de puntos en el plano y la transformación de dos o más transformaciones. Cuando las figuras están en disposición homotética o se consideran como figuras separadas (p. 25).

Se adoptó lo anterior, dado que, desde la relación intrafigural se presentan las características de la semejanza frente a los ángulos y los lados de una figura. La relación de las longitudes proporcionales desde la explicación de las líneas paralelas a un triángulo, como la aplicación de los postulados de semejanza de triángulos. Desde la transformación geométrica se propone la explicación de las consecuencias de los postulados de semejanza entre triángulos rectángulos y la aplicabilidad del Teorema de Pitágoras.

Cabe resaltar que junto con el aspecto cognitivo los otros dos aspectos también desempeñan un papel significativo en el desarrollo de las Competencias Matemáticas, como lo menciona D'Amore, Godino, & Fandiño, (1998): "¿Qué sería una Competencia sin el deseo, sin la voluntad y sin el gusto de hacer uso de ella?" (p.21). Por tanto, estos tres aspectos está articulados en cada una de las tareas se propusieron, con ambientes de aprendizajes adecuados, para promover en los estudiantes de grado noveno la Competencia Matemática Comunicar y de esta manera, evidenciar mejores niveles de desempeño y actuación matemática tanto en el aula como por fuera de ella.

La estrategia seguida por el proyecto PISA considera tres niveles de complejidad en los ítems propuestos respecto de las competencias generales requeridas. El informe habla de grupos de competencias, y en este caso, se distinguen por las demandas cognitivas implicadas en las tareas que los ejemplifican. (Rico y Lupiáñez, 2008).

Los niveles de complejidad de la Actividad Matemática como lo menciona García (2013) hacen referencia a "la complejidad creciente de las tareas propuestas y se expresan, finalmente, en los niveles de complejidad de los procesos matemáticos que deben desarrollar los estudiantes" (p.186)

- *Competencia Matemática*. Se enmarcada a partir de los anteriores tres mediaciones y desde esta investigación debe potenciar en los estudiantes la formación integral e integradora de sujetos para que socialmente, respeten las diferentes subjetividades, como personas. Además, que en sociedad, sean críticas, reflexivas y procuren prácticas sociales responsables. En esta perspectiva, el saber matemático cobra sentido en la vida cotidiana del ser humano, su único fin es el de lograr la solución a las diferentes actividades y/o tareas que se presenten. Este planteamiento, como lo afirma García et al. (2012):

> Implica unos replanteamientos profundos en la evaluación del aprendizaje de las matemáticas escolares, requiere formación y autoformación de los profesores, remover concepciones y prácticas que aún son muy fuertes en la enseñanza de las matemáticas y que están en contravía de los referentes que la didáctica de las matemáticas viene planteando para evaluar el desarrollo de la Competencia Matemática en el estudiante. (p.81)

Las competencias matemáticas no son de naturaleza puramente disciplinar, pues aunque su base cognitiva está en el saber matemático, éstas cobran sentido en la práctica social y son condicionadas social y culturalmente (Montealegre y Coronado, 2011, p.1).

- *Competencia Matemática Comunicar (CMC)*. Respecto a la comunicación, Bishop (2005), considera fundamental que para la comprensión de la clase de matemáticas se debe tener en cuenta que se está tratando con gente, esto significa respetar las subjetividades e intersubjetividades presentes en el aula de clase; es decir, reconocer la multiculturalidad que se halla inmersa en un espacio social como lo es el aula de clase, donde la comunicación es el aspecto con el que se busca enfatizar el proceso y el producto de compartir significados.

Por eso, sólo se comparten ideas exponiéndolas y la charla es claramente, un vehículo de la mayor importancia para presentar conexiones; de esta manera, "si al constructo comunicación se le añade la dimensión de compartir, entonces el proceso es de tres vías: De alumno a profesor, de Profesor a alumno y de alumno a alumno". (Bishop, 2005, p. 24). Esto manifiesta que la acción de compartir significados en la clase de matemáticas es un proceso social en el que las ideas y pensamientos de los estudiantes, graduados por el docente, son el producto de una comunicación que vigilan por un acto educativo y no solamente formativo en la disciplina matemática. Desde esta interpretación social del aprendizaje de las matemáticas se hace mención de tres aspectos fundamentales en la educación matemática:

> - Las actividades matemáticas en las que se busca involucrar al estudiante con las matemáticas y no la presencia de contenidos por parte del docente.
> - La comunicación, como aspecto que busca enfatizar el proceso y el producto de compartir significados.
> - La negociación, aspecto en el que se busca enfatizar la asimetría de la relación profesor/alumno en el desarrollo de significados compartidos. (Bishop, 2005, p.23)

Es a partir del compartimiento y la negociación de significados que se genera la interacción y la comunicación en el aula de matemáticas, lo cual permite que los estudiantes se comuniquen matemáticamente en dicha comunidad de aprendizaje.

Para Sfard (2008), "aprender matemáticas ahora se concibe como un proceso de convertirse en miembro de una comunidad matemática. Esto implica sobre todo, la habilidad de comunicarse en el lenguaje de esta comunidad y de actuar según sus normas particulares" (p.29). Quiere decir que la participación activa de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas va a depender en cierta medida, de las múltiples oportunidades que los docentes les proporcionen para discutir, hacer cuestiones y reforzar la comprensión de las matemáticas, con el objetivo de que construyan su propio discurso, conducido por el profesor, de modo que: escuchen, comenten, respondan y hagan preguntas unos a otros.

De ésta manera la CMC se enmarca en un proceso social a partir del compartimiento y la negociación de significados que se generan en la interacción y comunicación en el aula de matemáticas, lo cual permite que los estudiantes se comuniquen matemáticamente en dicha comunidad de aprendizaje. La CMC se enmarca desde dos puntos de vista mutuamente complementarios, como:

> - La habilidad de expresar de manera oral o por escrito en lenguaje matemático el resultado del pensamiento sobre las actividades matemáticas propuestas.
>
> - La capacidad de construcción de un discurso que desde un enfoque comunicacional se procure por una interacción social de los miembros de la clase, en el que se fomente el diálogo, el intercambio de ideas entre alumno a profesor, de Profesor a alumno y de alumno a alumno y de esta forma, poner en juego los aspectos cognitivos, la tendencia de acción y afectivos que dé pie a unas prácticas discursivas para compartir, negociar y construir conocimiento socialmente compartido.

De acuerdo con Rico y Lupiáñez (2008) y Solar (2009) se asumirá los tres niveles de complejidad adoptados en PISA, estos son: *reproducción, conexión y el nivel de Reflexión*. En coherencia como lo menciona García et al. (2013):

> Si bien reconocemos el aporte en los niveles de complejidad asociados a la evaluación del aspecto cognitivo de la competencia, consideramos que, en el aula de clase, el docente debe contribuir a generar procesos de interacción entre los sujetos, que contribuyan al desarrollo de aspectos afectivos, volitivos, éticos, metacognitivos y de pragmática de uso de la competencia matemática. Ello permitiría no clasificar al estudiante, sino valorar la calidad de su actividad matemática de aprendizaje y caracterizar el desarrollo de sus competencias a partir de la movilización de procesos matemáticos específicos asociados a éstas. (p.27)

Lo anterior permite comprender el valor social y humano de la CMC en el estudiante, reconociendo en él no solo su evolución en el aspecto cognitivo, sino también, su proceso creciente en aspectos volitivos y metacognitivos que subyacen en el desarrollo de las tareas matemáticas propuestas por el docente.

Pasar de un nivel de complejidad a otro requiere, por un lado, el esfuerzo y tiempo del docente para la selección y planificación de tareas que tengan contenido y significado matemático y por otro, evidenciar las capacidades que el estudiante pone en juego durante el desarrollo de proceso s matemáticos en la resolución de las Actividades Matemáticas. Si bien es cierto, los Niveles de Complejidad ubican a los estudiantes en lo que se refiere al aspecto cognitivo de la Competencia, cabe reiterar que esta investigación también, tuvo en cuenta los aspectos metacognitivos, afectivos y volitivos del estudiante. Por eso el reto de esta investigación es movilizar los Niveles de complejidad de la CMC teniendo presente también el aspecto afectivo: *disposición* y el *deseo* de responder a una determinada solicitud (externa o interna) y la tendencia de acción: la *dedicación*.

Método

La investigación se centra en cómo contribuir a la movilización de los Niveles de Complejidad de la Competencia Matemática Comunicar en estudiantes de grado noveno a partir de la *Semejanza de triángulos*.

Para alcanzar este propósito se consideró conveniente utilizar la metodología de investigación cualitativa. Ésta responde a la búsqueda de situaciones que no son fácilmente medibles ni comparables por medio de parámetros numéricos. Como lo expresa Stake (1995), citado por Sánchez y Ramírez (2013), la característica más destacada de la investigación cualitativa es el énfasis en la interpretación; pues, a partir de sus observaciones y la confrontación con otros datos se obtienen las conclusiones. De ahí que la interpretación de las actuaciones y desempeños, como evidencias de la movilización (del avance) que realizan los estudiantes de sus saberes en procesos de comunicación, hacen parte del foco de interés del estudio.

Se asume el estudio de caso como estrategia de investigación, pues consiste en una forma de investigación empírica que aborda fenómenos contemporáneos, en términos holísticos y significativos, en sus contextos específicos de acontecimiento, orientada a responder preguntas de ¿cómo? y ¿por qué? suceden las cuestiones bajo examen. A la vez, se puede recurrir a la utilización de múltiples fuentes de información y procedimientos de análisis, -de considerarlo beneficioso- apelar a formulaciones teóricas como punto de partida para el desarrollo de la investigación. La variedad de las fuentes de información utilizadas (observación, entrevistas, documentos, etc.) se orientan a captar y describir la complejidad de los fenómenos en estudio y su contexto con la mayor riqueza posible, respetando la mirada de los actores sociales involucrados. (Arévalo, 2012)

La población participante corresponde a estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Corazón Inmaculado de María del Municipio del Doncello Caquetá, cuyas edades oscilan entre los 13 y 15 años y quienes decidieron hacer parte de la investigación. Estos estudiantes fueron divididos en grupos de cuatro integrantes cada uno.

La participación del docente en el estudio no sólo es en el papel de investigador, sino que se fundamenta en el rol de investigador participante, por cuanto además de ser profesor, orienta las diferentes discusiones presentadas en cada sesión.

Los datos surgen a partir de dos tareas matemáticas en dos sesiones de trabajo con los estudiantes. En la planificación de éstas tareas se han articulado los conceptos asociados a la Semejanza de Triángulos. La primera y la segunda sesión se programaron para tres horas de clase. Cada hora de clase tiene una duración de 60 minutos. De manera específica, para el desarrollo de las tareas se diseñaron las siguientes actividades:

- Tarea 1. *La Feria.* En esta tarea se les encargó a los estudiantes organizar una feria en la que el producto a ofertar fuera la semejanza de triángulos. Se le puntualizaron unos conceptos claves como son: razón y proporción de segmentos, el Teorema de Tales, los Postulados de Semejanza de Triángulos y las consecuencias de los postulados de Semejanza de triángulos rectángulos. Los escolares debían consultar por sus propios medios los conceptos y su aplicabilidad. En este proceso contaron con la asesoría del profesor, quien iba explicando y/o aclarando las dudas que les surgían durante la consulta bibliográfica. Igualmente les correspondía armar sus propios stands, decorándolos con materiales alusivos a los artículos a ofertar.

El desarrollo de la tarea se llevó a cabo en dos momentos, en el primero de los casos, hicieron uso de la tarde anterior al primer periodo de clase para ubicar e instalar los elementos del Stand. El segundo momento consta de tres periodos de clase, cada uno de 60 minutos y, se realizó en la sala múltiple de la Institución Educativa, donde se simuló una feria real, en la que las exhibiciones y exposiciones hacían referencia a la Semejanza de triángulos y de sus conceptos asociados.

- Tarea 2. *Calculando una altura difícil de medir***.** En esta tarea los equipos de trabajo fueron llevados al parque central del municipio de El Doncello, donde se les pidió determinar la altura de uno de los árboles del haciendo uso de los conceptos asociados a la Semejanza de Triángulos. Para el desarrollo de esta tarea, los Caso debían ir solucionando paso a paso una serie de situaciones problemáticas que se les plantearon dentro de la misma y las cuales los llevaban a ir movilizando los diferentes niveles de complejidad de la CMC.

Al finalizar la actividad se pidió a cada equipo que expusieran y sustentaran los criterios que utilizaron al calcular la altura del árbol seleccionado. Al igual que en la tarea 1, se utilizaron tres periodos de trabajo cada uno de 60 minutos. En el primero se desarrolló la experiencia y en los dos siguientes se sustentaron los procesos realizados.

Resultados y Discusión.

- ***Tarea 1. La Feria.*** Como el objetivo de la actividad era contribuir a la movilización de los niveles de complejidad de la CMC a partir del estudio de la semejanza de triángulos; se diseñaron e implementaron unas preguntas orientadoras a modo de situación problémica, que contribuyeron al desarrollo y logro del objetivo. Éstas se formularon según los productos que se ofertaban en el stand y se presentaron como inquietudes y/o curiosidades que le surgían al visitante al escuchar hablar del producto. Un ejemplo de estas preguntas fue:

- *Situación uno*: Que bueno, y respecto a ese producto de proporcionalidad de segmentos, ¿Cuándo puedo conocer o puedo saber que existen segmentos proporcionales?
- *Situación dos***:** Eso significa señor, que si yo tengo estos dos [Tomando dos objetos rectilíneos de la mesa] segmentos, ¿puedo establecer una proporción? ¿Cierto?

Para el análisis de los resultados obtenidos, se elaboraron descriptores[11] que ayudaron a evidenciar la Movilización de los Niveles de complejidad de la CMC, así como de los aspectos afectivos y la Tendencia de Acción, señalados en la tabla 1:

Tabla 1. *Descriptores Movilización de los Niveles de complejidad de la CMC*

Aspecto	Procesos	Descriptor
Cognitivo	**Comprender**	*Identifica el saber matemático a utilizar en la solución de una situación.*
		Usa el Teorema de Pitágoras para determinar la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo.
		A partir de la representación gráfica de la situación problémica, expone secuencial y coherentemente los procesos para calcular otros datos del triángulo haciendo uso del Teorema de Tales.
		Con base en la modelación de la situación problémica expone secuencial y coherentemente la aplicación del postulado para establecer la semejanza de triángulos.
	Leer	*Comprende las orientaciones escritas presentadas en la situación.*
	Actividad discursiva	*Expone y sustenta en forma oral y/o escrita sus conocimientos acerca de la proporcionalidad de segmentos utilizando correctamente el lenguaje matemático.*
		Con argumentos expresados oralmente, explica, acepta o rechaza la proporcionalidad entre objetos rectilíneos del contexto.
		Expresa oralmente en qué condiciones se puede establecer la proporcionalidad de segmentos
		Expone y sustenta en forma oral sus conocimientos acerca del teorema de Tales.
		Expone y sustenta en forma oral sus conocimientos acerca de los postulados de semejanza de triángulos.

[11] García, et al (2013, p.186) expresa que los descriptores son concebidos como expresiones verbales o escritas, relacionadas con la esencia del correspondiente proceso y que tiene como fin contribuir a describir las actuaciones de los estudiantes en las diferentes tareas que se le proponen.

Aspecto	Procesos	Descriptor
		Sustenta con argumentos orales la conveniencia o su discrepancia al aplicar un determinado postulado para establecer la semejanza de triángulos.
		Establece acuerdos negociados sobre los resultados obtenidos.
		Demuestra las condiciones necesarias para establecer la correspondencia entre segmentos y construir una proporción.
		El aporte de sus ideas facilita la construcción del significado matemático.
Afectivo	**Disposi-ción**	*Es puntual al ingresar y asiste a todas las actividades.*
		Con sus actitudes Muestra la disposición para el desarrollo de las tareas.
	Deseo	*Participa activamente en el desarrollo de las actividades matemáticas de aula*
		Muestra interés porque su discurso oral sea cada vez de mejor calidad
		Demuestra iniciativa (realiza y propone) en la toma de decisiones.
		Muestra creatividad e iniciativa en el desarrollo de las actividades matemáticas de aula.
		Toma decisiones coherentes, analizando las diversas posibilidades, sus consecuencias y justificando la opción tomada.
Tendencia de Acción	**Dedica-ción**	*Muestra actitudes de liderazgo positivo en el desarrollo de las actividades matemáticas.*
		Continúa con el desarrollo de la actividad matemática a pesar de las dificultades encontradas.
		Constantemente muestran dedicación por promover con su discurso la construcción del significado matemático.
		Demuestra su aprendizaje a través de la participación dinámica y efectiva en el equipo.

En los registros fotográficos (Ver figuras 1, 2, 3, 4) se da evidencia de los materiales y representaciones que elaboró cada Caso para la presentación de sus productos y la ambientación de sus Stand, en el desarrollo de la CMC, en su forma escrita. En general se puede establecer que los estudiantes tienen un desempeño superior al modelar los conceptos asociados a la Semejanza de Triángulos teniendo en cuenta las consultas que realizaron previamente.

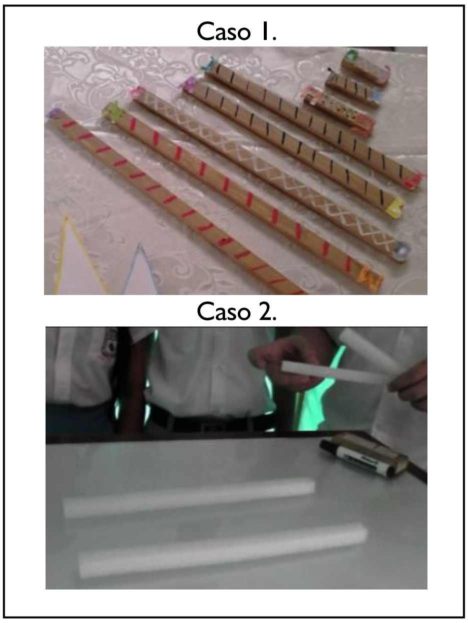


Figura 1. Fotografía 1. Representación de Segmentos proporcionales.

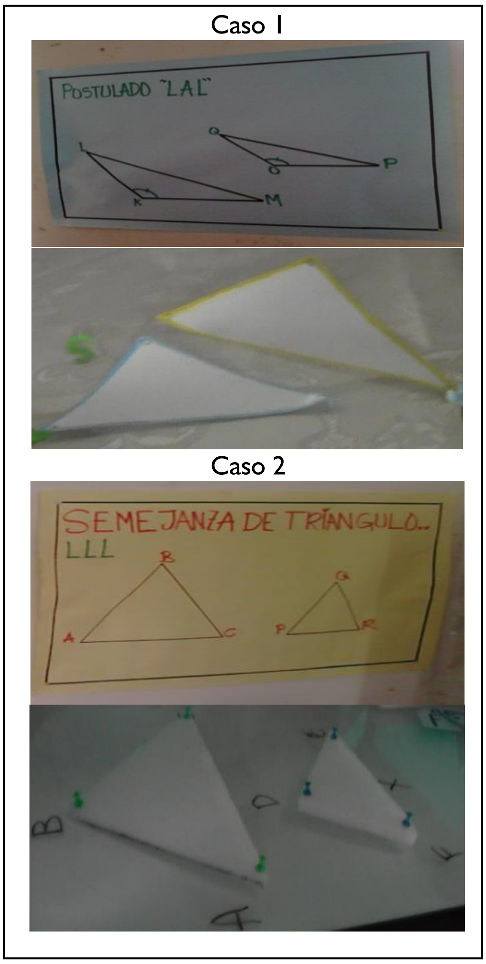


Figura 2. Fotografía 2. Representación de Triángulos semejantes.

ISSN 2322- 6307

Caso 1

Caso 2

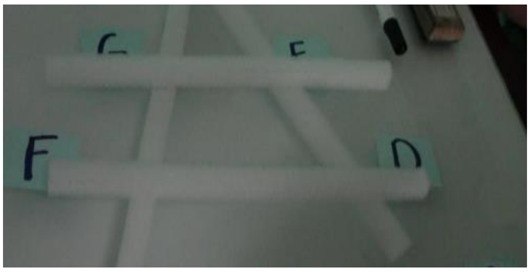
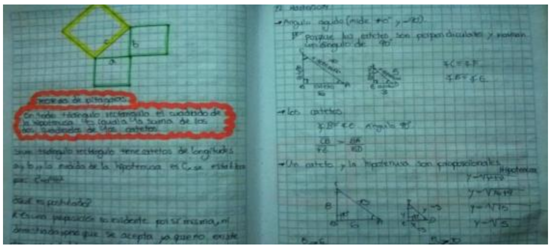


Figura 3. Fotografía 3. Representación del Teorema de Tales**.**

El lenguaje escrito construido por los Casos se relaciona correctamente con los productos que ofrecieron, por cuanto tienen en cuenta elementos, símbolos y expresiones matemáticas que se utilizan en el aprendizaje de la Semejanza de triángulos (Ver figura 4):

Caso 1



Caso 2

Figura 4. Fotografía 4. Apuntes escritos.

En los siguientes episodios, presentados en la tabla 2, se muestra en su forma oral el desarrollo de la CMC, en su aspecto cognitivo. Con la primera pregunta orientadora se buscaba determinar la capacidad de los estudiantes en el cumplimiento del descriptor: *Expone y sustenta en forma oral sus conocimientos acerca de la proporcionalidad de segmentos,* como proceso matemático asociado al aspecto cognitivo de la CMC para éste momento de la tarea:

Tabla 1. *Transcripción discurso oral de la situación 1.*

Situación uno- P: *Que bueno, y respecto a ese producto de proporcionalidad de segmentos, ¿Cuándo puedo conocer o puedo saber que existen segmentos proporcionales?*	
Caso uno	**Caso dos**
$L1 - E_{1.2}$ $L1 - E_{1.2}$: Primeramente le quiero ofrecer el producto razón de segmentos **[***señalando con la mano el título escrito en una de las carteleras del stand***]**, que como dice, razón de segmentos es una comparación entre medidas o longitudes. Como se puede ver acá en esta pequeña replicación, tenemos **[***tomando de la mesa unos objetos rectilíneos que ya tenían previamente etiquetados en sus extremos***]** los segmentos EF y el segmento GH, para hallar una razón entre sí, se toman estos dos segmentos y se dividen. Entonces, 60 dividido doce igual a cinco, entonces, la razón que hay entre estos dos segmentos **[***Tomando los dos segmentos en las manos***]** es cinco. También incluido con éste producto se da un combo de segmentos proporcionales que, dando en éste mismo término tomamos **[***tomando de la mesa otros dos segmentos, diferentes a los dos primeros***]**, el segmento AB y el	$L1 - E_{2.2}$: Existen segmentos proporcionales cuando hay una razón equivalente entre las medidas de cada par de segmentos.

segmento CD. El segmento AB mide 40cm y el segmento CD mide 8cm,, entonces hacemos este mismo proceso; dividimos entre sí, entonces 40 dividido 8 es igual cinco, entonces la razón entre cada par de estos segmentos **[***señalando tanto los dos segmentos iniciales como los dos que tomó después***]** es cinco, entonces aquí ya podemos establecer una proporción.	

Al respecto se encontró que los dos estudiantes cumplieron con el descriptor; sin embargo, $E_{1.2}$ lo cumplió con un nivel de desempeño Alto y $E_{2.2}$ con un desempeño básico, pues fue poco fluido en su respuesta, se limitó a tratar de reproducir la condición de proporcionalidad de segmentos utilizando términos propios del concepto pero sin conservar la coherencia en su discurso. Por su parte, $E_{1.2}$ desarrolló un discurso más amplio en el que se notó una interpretación apropiada de los términos matemáticos implicados en la construcción de los conceptos, justificó sus explicaciones a través de modelaciones con objetos del medio, mostró seguridad en el momento de argumentar en público sus conocimientos. Se puede afirmar entonces, según García (2013, p.171) que el estimular a los estudiantes a pensar y razonar a cerca de las matemáticas y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento de forma oral los conduce a ser claros y convincentes. Las respuestas tanto de $L1 - E_{1.2}$ como de $L1 - E_{2.2}$ se ubican en el nivel de complejidad de Repro ducción dado que los estudiantes expusieron correctamente la proporcionalidad de segmentos; enunciando y aplicando (de forma oral) los algoritmos y cálculos habituales.

En este momento, cuando el visitante mediante una afirmación falsa quiere poner a prueba el nivel cognitivo de los estudiantes se observan dos situaciones. En el primer Caso $E_{1.2}$demuestra a través de su discurso que ha aprendido los conceptos relacionados a la proporcionalidad de segmentos, puesto que una persona que aprende altera y extiende sus habilidades discursivas de forma que llega a ser capaz de comunicarse sobre tópicos matemáticos (Sfard, 2008, p.18). En el Caso dos se presenta una interacción entre los participan tes como grupo social, surgen diferentes discursos tendientes a compartir y desarrollar significado (Postman y Weingartner, 1971, citado por Bishop, 2005, p.23). En la tabla 3 se presentan los discursos orales:

Tabla 2. *Transcripción discurso oral de la situación 2*

Situación dos- P: *Eso significa señor, que si yo tengo estos dos [Tomando dos objetos rectilíneos de la mesa] segmentos, ¿puedo establecer una proporción? ¿Cierto?*	
Caso 1	**Caso 2**
$L1 - E_{1.2}$: No señor; Porque los dos requisitos para que haya una proporción es que exista al menos cuatro segmentos y que estos segmentos tengan una razón en común. O sea entre sí. Entonces, aquí seria; el lenguaje matemático para leer esto**[***ubicando cada uno de los segmentos que determinan las dos razones uno debajo del otro respectivamente, representando gráficamente* $\frac{AB}{GH}=\frac{AB}{CE}$**]** sería:  El segmento AB es al segmento GH cómo el segmento A… **[***piensa***]**, el segmento AB es al segmento CE **[**$E_{1.2}$*tiene dos objetos diferentes etiquetados con AB y otro CD***]**. Y en forma matemática para expresarla más clara, el **"*es a*"** se cambia por dos puntos y "como" es igual a cuatro puntos. Para saber si ésta proporción nos quedó bien hecha, tomamos los medios **[***Señalando las medidas de*	$L2 - E_{2.3}$: **[***Quien desde hace varios segundos hacía gestos casi desesperados por hacer parte del dialogo***]** Perdonen compañeros, Querido comprador; existen dos requisitos fundamentales: que sean cuatro segmentos y que el resultado de sus razones sean iguales. Por ejemplo, digamos acá, éste es el doble de grande que éste, lo mismo pasa con éste **[***mostrando y comparando entre sí dos pares de objetos rectilíneos que toma de la mesa donde, el primer par tiene medidas de 30 y 15 centímetros respectivamente y el segundo par con medidas de 10 y 5 centímetros respectivamente***]**; como sus razones son iguales

los segmentos AB de la primera razón y del segmento CD de la segunda] los multiplicamos y debe dar el mismo resultado [producto] que los extremos *[Señalando las medidas del segmento AB de la segunda razón y del segmento GH de la primera]*. En un caso de que no haya un segmento, por ejemplo el segmento GH *[retirando dicho segmento de la mesa]*, ¿qué se puede hacer? entonces en éste caso tomamos una incógnita, que puede ser R *[reemplazándolo en el lugar donde estaba la medida del segmento GH por una letra R hecha de papel]*. Entonces, para calcular esta medida se toman los medios, es decir el segmento *AB [de la primera razón]* y el segmento *CD [de la segunda razón]* y se multiplican. Entonces aquí *la medida* que está acompañando a R *[señalando las medidas del segmento AB de la segunda razón]* pasa a dividirlos, entonces, éste resultado es el que nos daría la medida del segmento GH *[ubicando nuevamente el segmento sobre la mesa]*.	entonces allí podríamos hablar de segmentos proporcionales.

Por lo anterior y teniendo en cuenta que en los dos estudios de Caso se logra *Con argumentos expresados oralmente, explica, acepta o rechaza la proporcionalidad entre objetos rectilíneos del contexto* y *expresar oralmente en qué condiciones se puede establecer la proporcionalidad de segmentos,* se valoró el desempeño del Caso uno como superior y el del Caso dos como desempeño alto. De esta manera, tanto el Caso uno como el Caso dos se mantienen en el nivel de reproducción de la CMC. Sin embargo, se resalta que $\boldsymbol{L1-E_{1.2}}$ relacionó las condiciones de proporcionalidad con materiales del contexto para demostrar sus explicaciones; mientras que el segundo Caso se limitó solo a reproducir dichas condiciones.

En lo que corresponde a la *disposición* como componente del aspecto afectivo asociado a la CMC, en los dos Caso se valora la actitud positiva que presentaron los estudiantes para el desarrollo de la actividad, pues siempre se mantuvieron expectantes, prestos y deseosos de participar por su propia voluntad, en los discursos que se iban generando como respuesta a las preguntas, situaciones problema e inquietudes presentadas por el visitante.

En consecuencia, los componentes del aspecto afectivo en los estudiantes, siempre correspondieron con lo preestablecido en los descriptores asociados a éste. De ellos resaltamos: *Participa activamente en el desarrollo de las actividades matemáticas de aula*, *muestra interés porque su discurso oral sea cada vez de mejor calidad* $(S1, L1-E_{1.2};\ S2, L1-E_{1.2};\ L2-E_{2.3}\ ;\ S4, L1-E_{2.1}; L3-E_{1,4})$ y, *muestra creatividad* e *iniciativa en el desarrollo de las actividades matemáticas de aula* (Ver fotografías de las figuras 1, 2, 3 y 4). Los cuales aportaron articuladamente al desarrollo de los procesos cognitivos, y en particular, al de la actividad discursiva desde su componente oral.

Por otra parte, el componente *dedicación,* se vio reflejado en el esfuerzo que *siempre* hicieron los estudiantes al construir lo mejor posible los conceptos asociados a la semejanza de triángulos, lo que se pudo evidenciar en las constantes asesorías solicitadas al profesor con el ánimo de profundizar y/o aclarar dudas, en el registro escrito que llevaban de sus consultas y, en el esfuerzo para armar y decorar sus stands con imágenes y materiales alusivos a los productos que ofertaban.

- Tarea 2**.** *Calculando una altura difícil de medir.* En la figura 5, se evidencia cómo la CMC desempeña un papel importante para cada Caso cuando su interés radica en generar habilidades comunicativas en la pragmática de uso de la competencia, pues los estudiantes cumplen un rol en la tarea propuesta en un contexto conocido para ellos como lo es el parque central del municipio (quien actúa de observador, quienes hacen las medidas y quien las registra). Entonces el uso y el contexto sociocultural dan sentido a los conceptos asociados a la semejanza de triángulos rectángulos, por ello, conocimiento y competencia se construyen simultáneamente (García et al, 2013, p.28).

Figura 5 .Fotografía 5. Caso 1 y 2-toma de medidas en el parque

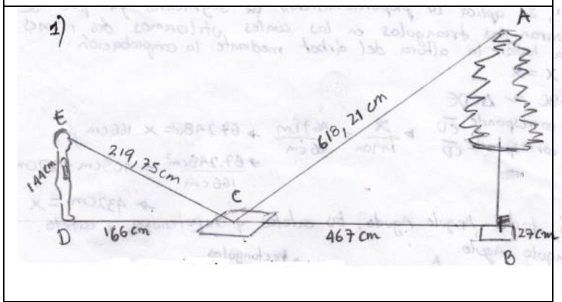
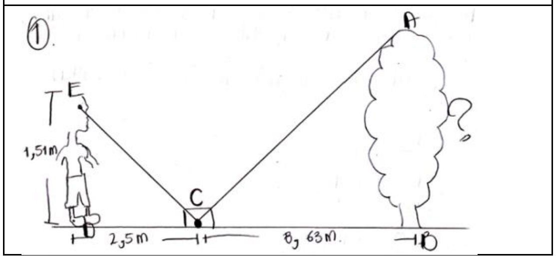
A continuación se presentan algunas de las situaciones propuestas en la tarea:

- Desde el componente escrito:
  Situación 1: Represente o modele la situación planteada con las medidas correspondientes.
  Situación 2: Para calcular la altura del árbol ¿Es posible aplicar la proporcionalidad de segmentos? Explique su respuesta en forma escrita y calcúlela.
  Situación 3: Consideran que la altura calculada corresponde a la verdadera altura del árbol. Justifiquen en forma escrita su respuesta.

- Desde el componente oral:
  Situación 1: Calcule la altura del árbol.
  Situación 2: Calcule la longitud de la hipotenusa del triángulo pequeño.
  Para el análisis de los resultados obtenidos, se tomaron algunos de los descriptores planteados en la Tabla N°1, que ayudaron a evidenciar la Movilización de los Niveles de complejidad de la CMC, así como de los aspectos afectivos y la Tendencia de Acción.

Desde su forma escrita, en el aspecto Cognitivo de la CMC, se muestra el análisis de las situaciones indicadas en la tabla 4:

Tabla 4. *Registro fotográfico 1. Componente escrita situación uno*

Situación 1: Representa o modele la situación planteada con las medidas correspondientes.
Caso 1

Caso 2


Se evidencia que tanto el Caso 1 como el Caso 2 modelaron la situación planteada construyendo los dos triángulos rectángulos en los cuales ubicaron las medidas que tomaron en el parque y además, aquellas que calcularon en las situaciones posteriores. Es de resaltar que los estudiantes nombraron correctamente los vértices de los triángulos e indicaron la posición de los tres componentes de la actividad, como lo son: la persona que observa en el espejo el extremo del cogollo del árbol, el espejo y el árbol.

Lo anterior manifiesta que los estudiantes en el proceso de leer, comprendieron la secuencia escrita, presentada en la tarea (Niño, 1994, pág. 294). Se logró de esta manera, promover el descriptor: *comprende las orientaciones escritas presentadas en la situación*. Aunque el Nivel de Complejidad no deja de ser de Reproducción el desempeño alcanzado por los dos Caso se encuentra en *Superior*. En la tabla 5 se indica esta situación.

En ambos Casos son claros en exponer que gracias a la proporcionalidad de segmentos se puede hallar la incógnita, sin embargo el Caso uno, al plantear la semejanza de triángulos no tiene encuenta la relación de los vértices de los triángulos, pues en realidad su representación debio ser ΔABC~ΔEDC (Triángulo ABC semejante al Triángulo EDC), así mismo, les hizo falta tener en cuenta los valores decimales en la divisón (un cociente de 405,10cm) cuyo resultado es alterado por los 27cm, que ellos no específican, pero hace referencia al desnivel del piso donde estaba ubicado el árbol.

Por su parte, el Caso dos establece y resuelve correctamente la proporción teniendo en cuenta los valores decimales en la respuesta con sus respectivas unidades; no obstante el discurso tanto del Caso uno como del Caso dos influyen en promover el proceso de comprensión, al considerar la proporcionalidad como un concepto matemático fundamental en el cálculo de la altura del árbol.

Tabla 5. *Registro fotográfico 2. Componente escrita situación dos*

Situación 2: Para calcular la altura del árbol ¿Es posible aplicar la proporcionalidad de segmentos? Explique su respuesta en forma escrita y calcúlela.
Caso 1
A) Sí, se aplica la proporcionalidad de segmentos ya que se comparan dos triangulos en los cuales utilizamos dos razones para hallar la altura del árbol mediante la comprobación $X = X$ $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ $\overline{AB}$ corresponde $\overline{ED}$ $\overline{BC}$ corresponde $\overline{CD}$ $\rightarrow \frac{X}{149cm} = \frac{467cm}{166cm} \rightarrow 67.248cm^2 = X \cdot 166cm$ $\rightarrow \frac{67.248cm^2}{166cm} = 405cm + 27cm$ $\rightarrow 432cm = X$
Caso 2
4. Sí es necesario aplicar la proporcionalidad de segmentos porque gracias a eso pudimos obtener el resultado de la incógnita. No hacemos este procedimiento de la proporcionalidad de segmentos ya que en el punto anterior fue resuelto. Aclaramos que con la proporción hecha pudimos comparar la altura del compañero con el árbol (incógnita) y las distancias que hay entre los pies del compañero y punto donde se ve la cúspide del árbol y la que hay desde ese punto hasta el tallo del árbol.

En cuanto al descriptor establecido para ésta situación: *Expone y sustenta en forma oral y /o escrita sus conocimientos acerca de la proporcionalidad de segmentos utilizando correctamente el lenguaje matemático.* El Caso uno y dos, lo desarrollan con un desempeño *superior* movilizando el Nivel de complejidad de la CMC de Reproducción al de Conexión al interpretar y explicar la importancia de la proporcionalidad de segmentos en la solución de la actividad (Rico & Lupiáñez, 2008, p. 258).

En relación con el componente escrito, en la tabla 6 se muestra que los Casos manifiestan en su discurso escrito que los procesos matemáticos aplicados como la proporcionalidad de segmentos, los postulados de semejanza de triángulos y el uso del teorema de Pitágoras les permitió obtener una medida aproximada a la altura real del árbol y que gracias a estos saberes existe la confianza en considerar que la medida obtenida corresponde a la verdadera altura. Así mismo como lo menciona el Caso dos, estos conceptos matemáticos son fundamentales para determinar alguna otra distancia, longitud o dimensión, siempre y cuando así lo requieran.

Tabla 6. *Registro fotográfico 3. Componente escrita situación tres*

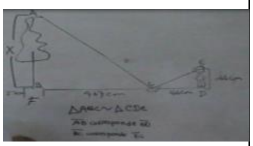
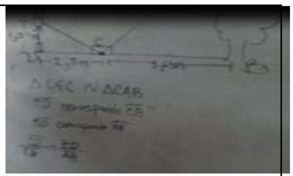
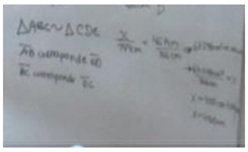
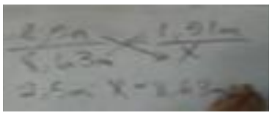
Situación 3: Consideran que la altura calculada corresponde a la verdadera altura del árbol. Justifiquen en forma escrita su respuesta**.**
Caso 1
10) Si consideramos que es la altura verdadera del árbol ya que gracias a los segmentos proporcionales y los postulados de semejanza de triángulos y el teorema de pitágoras podemos asegurar que nos aproximamos a la medida verdadera del árbol.
Caso 2
10 - Si porque gracias a los segmentos proporcionales, seme-janza de triángulos, teorema de pitágoras, el teorema de tales pues nos ayuda a dar una medida (aproximado) aproximada dandonos a conocer la altura del árbol y así mismo poder hallar cual-quier medida. como también nos ayuda a poder construir edifici-os etc.

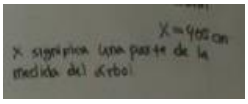
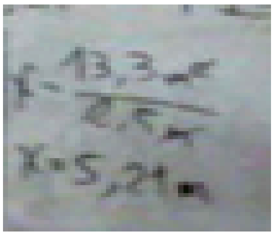
Según Powell (2001, citado por Marcos, 2008) "la reflexión escrita sobre las experiencias matemáticas puede llevar a los alumnos a pensar críticamente sus ideas y hacer que la reflexión sobre la experiencia sea una reflexión crítica y atenta sobre el propio conocimiento" (p.50). Es decir que, el discurso escrito de ambos Casos permitió evidenciar la movilización del Nivel de Conexión al de Reflexión de la CMC cuando los estudiantes a través de los datos obtenidos, pudieron asegurar que existe una coherencia en el conocimiento matemático que pusieron en juego para determinar la altura del árbol. Es indudable que las maneras cómo la tarea les fue solicitando determinar esa altura por medio de los procesos que emplearon. Igualmente, les permitió resolver el problema al obtener unas medidas bien aproximadas entre sí. Esta reflexión, sin duda alguna, justifica los resultados obtenidos con un mayor grado de argumentación y madurez sobre el problema propuesto (Rico & Lupiáñez, 2008, p. 258). En consecuencia, el desempeño correspondiente al descriptor: *establece acuerdos negociados sobre los resultados obtenidos,* es *Superior*.

 ISSN 2322- 6307

Respecto al desarrollo de la CMC en su forma oral en el aspecto cognitivo, en la tabla 7 se muestra este aspecto. Los Casos evocan que a partir de la secuencia de pasos necesarios para hallar la altura del árbol es importante establecer la semejanza de triángulos que obtuvieron al modelar la situación planteada (Caso 1: L1-E.1; y Caso 2: L1-E.2) como lo expone Gallardo, González & Quispe (2008): "la comprensión de un conocimiento matemático está ligada a las experiencias matemáticas que se producen a través de las situaciones en las que interviene dicho conocimiento" (p. 367).

Tabla 7. *Transcripción discurso oral de la situación 1.*

Situación 1: Calcule la altura del árbol.	
Caso 1	**Caso 2**
L1-E.1: *para calcular la altura del árbol vamos a tener en cuenta los pasos anteriores* [la secuencia de pasos que escribieron en la situación 2], *entonces, primero vamos hacer la semejanza de triángulos* [escribiendo en el tablero], *es decir: el triángulo ABC es semejante al triángulo EDC, vamos hacer la correspondencia…*  *Entonces, el segmento AB, se corresponde con el segmento ED y el segmento BC con el segmento DC.*	**L1-E.2:** *Bueno ya como sabemos tenemos dos triángulos; que sería el triángulo* ***DEC*** *es semejante al triángulo* ***CAB****. Entonces procedemos hacer la proporción* [Condición suficiente para construir la proporción]. *Entonces tomamos dos longitudes correspondientes, podemos tomar CD corresponde al segmento CB y el segmento ED corresponde al segmento AB. [Interviene E.1.1 para apoyar a su compañero]*
L2-E.1.1: *Ahora procedemos a armar la proporción* [escribiendo en el tablero la proporción], *entonces* ***x*** *que es la incógnita es a 144cm como 467cm es a 166cm y hacemos la multiplicación de los medios que nos daría 67248cm^2 ; igual a* ***x*** *que es la incógnita; luego esto es igual a 67248cm^2 , sobre 166cm; para hallar la incógnita, entonces, x es igual a 405cm y a esto le sumamos los 27cm que sería el desnivel del suelo al tallo del árbol [segmento BF descrito en la figura]****,*** *entonces la altura del árbol es 432cm.*	**L2-E.2.1:** *Entonces armamos la proporción y seria el segmento CD es a al segmento CB como el segmento ED es al segmento AB.*  *[Interviene E.2 continua con el proceso]*
L2-E.1.1: *Ahora procedemos a armar la proporción* [escribiendo en el tablero la proporción], *entonces* ***x*** *que es la incógnita es a 144cm como 467cm es a 166cm y hacemos la multiplicación de los medios que nos daría 67248cm^2 ; igual a* ***x*** *que es la incógnita; luego esto es igual a 67248cm^2 , sobre 166cm; para hallar la incógnita, entonces, x es igual a 405cm y a esto le sumamos los 27cm que sería el desnivel del suelo al tallo del árbol [segmento BF descrito en la figura]****,*** *entonces la altura del árbol es 432cm.* 	**L3-E.2:** *ya reemplazando: entonces sería, el segmento CD que es la distancia donde está el estudiante al espejo que es 2,5m…es al segmento CB; que es la distancia del espejo hasta el tallo [escribe en el tablero 8,63m] como el segmento ED; que es la distancia de los pies hasta los ojos del estudiante, es 1,51m; sobre la incógnita que es la altura del árbol el segmento AB. Entonces procedemos hacer la proporción multiplicando los extremos y los medios.* 
L3-E.1: *Finalmente* ***x*** *es igual a 405cm más 27cm que es el desnivel y nos daría el*	**L4-E.2:** *Ya multiplicando los extremos nos daría… 13,3 m$^{2…}$ entonces, el número que acompaña a*

resultado que es la altura del árbol de 432cm, entonces x [señalando y aclarando en la figura] es una parte de la medida del árbol y como observamos al sumar los 27cm nos da 432cm que es la altura total del árbol 	*la incógnita [encerrando 2,5m*] *acá multiplica, entonces pasa a dividir, entonces la incógnita igual a 13,3 m^2 sobre 2,5m, entonces acá cancelamos el exponente* [simplifica m^2 con m] *y esto nos daría que x es igual a 5,21m la altura del árbol.* 
L4-P: *Es importante lo que acabas de aclarar sobre el valor de x*	**L5-P:** *Entonces para ustedes ¿ese árbol era pequeño?*
L5-E.1: *Entonces la altura total del árbol son los 432cm.*	**L6-E.2.1:** *Pues nos dimos a la conclusión que la altura del árbol era 5,21m por medio de la* ***proporcionalidad de segmentos****, una distancia ni muy amplia, ni muy corta, o sea no era muy alto.*

Es decir, cada integrante en su participación muestra seguridad en construir la semejanza debido al trabajo desarrollado en las tareas 1 y 2, esto se confirma cuando L2-E.1.1 y L3-E.2 construyen las correspondencias necesarias para armar la proporción y determinar la altura del árbol. Sin embargo L2-E.1.1 no tuvo presente los valores decimales en la divisón (un cociente de 405,10cm).

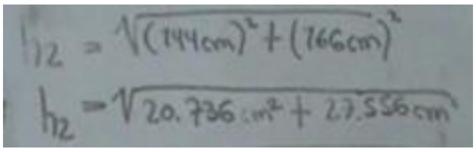
En cuanto a la Actividad discursiva se evidencia que L1-E.1 expresa de manera oral lo que va a hacer para calcular la altura del árbol, despues escribe en el tablero la semejanza de triángulos mostrando las correspondencias de los catetos, donde uno de los lados representa la medida a determinar. L2-E.1.1 interviene apoyando a su compañero**,** hablando y escribiendo a la vez en la construcción y solución de la proporción, en este evento L3-E.1 y L2-E.1.1 aclaran que el desnivel del suelo es relevante tenerlo encuenta para la altura total. De manera similar en el Caso 2, L1-E.2 y L2-E.2.1 se colaboran para determinar la medida del árbol que escogieron; manifiestan también, un buen dominio del conocimiento matemático a utilizar; como la interpretación que dan del resultado obtenido (conclusión que expone al final del episodio L6-E.2.1). De acuerdo a este nivel de participación, cada estudiante pone en juego los conocimientos aprendidos desde la tarea 1 y la tarea 2, ostentan un mayor aprendizaje con un discurso cada vez más calificado. (García et al, 2013 citando Sfard, 2008, p. 34).

Por lo anterior, cada Caso desarrolló los descriptores: a) i*dentifica el saber matemático a utilizar en la solución de una situación*, b) e*xpone y sustenta en forma oral y/o escrita sus conocimientos acerca de la proporcionalidad de segmentos utilizando correctamente el lenguaje matemático* y, c) d*emuestra las condiciones necesarias para establecer la correspondencia entre segmentos y construir una proporción.* El desempeño del caso uno es *Alto* y para el caso dos es *Superior.* Debido a sus discursos ambos movilizan el Nivel de complejidad de la CMC de Reproducción al de Conexión pues como afirma Goñi (2008, p.133), este nivel se relaciona con el tipo de solución que el estudiante da a la tarea. Se apoya sobre las capacidades requeridas en el nivel de reproducción. Si el estudiante interpreta la información, identifica los elementos y conceptos matemáticos que se requieren para resolver el problema, articula procesos que orientan hacia la respuesta, utiliza más de una representación semiótica del objeto matemático y hace conexión de procesos c ada vez menos rutinarios, sin dejar de ser familiares, su actividad matemática de aprendizaje caracteriza su desempeño y actuación en el grupo de conexión. En la tabla 8 se da cuenta del discurso oral:

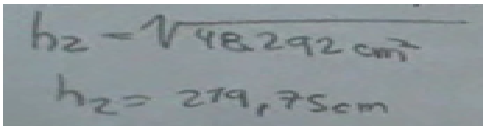
Tabla 8. *Transcripción discurso oral de la situación 2.*

Situación 2: Calcule la longitud de la hipotenusa del triángulo pequeño**.**
Caso 1
L1-E.1: *Para calcular la hipotenusa del triángulo pequeño utilizamos el teorema de Pitágoras, entonces para hallar la hipotenusa número 2 que es igual a la raíz cuadrada de 144cm al cuadrado que es el segmento ED más 166cm al cuadrado que es el segmento CD* [Escribe en el tablero].

Entonces la hipotenusa pequeña es igual a la raíz cuadrada de 20736cm^2 más 27556cm^2.



La hipotenusa número 2 es igual a la suma y nos da 48292cm^2 y entonces la raíz cuadrada es 219,75cm, esta sería la medida de la hipotenusa pequeña.

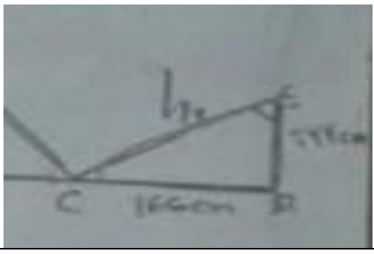


L2-P: *h2 ¿Qué significa dentro de la situación?*

L3-E.1.3: *En este caso sería como la distancia de la línea visual de la compañera hacia el punto del espejo*

L4-P: *¿Esa distancia cuál es?*

L5-E.1.1: *Va desde el vértice E hasta el vértice C.*

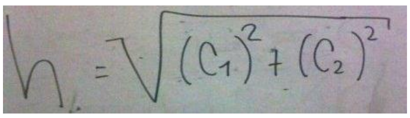


Situación 2: Calcule la longitud de la hipotenusa del triángulo pequeño**.**

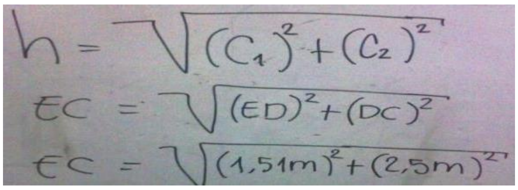
Caso 2

L1-E.2.3: *Es necesario aplicar el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa del triángulo pequeño el cual nos dice que la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.*

L2-P: *Eso que dijo su compañero, represéntenlo en la situación.* [E.2.3 escribe en el tablero el teorema que expuso]



L3-E.2.1: *Como la hipotenusa en este momento es el segmento EC, entonces el segmento EC que es igual a la raíz cuadrada del cateto 1 que en este caso es el segmento ED al cuadrado* [señalando la figura y escribiendo en el tablero] *más el cateto 2 al cuadrado que es el segmento DC al cuadrado, luego esto es igual a la raíz cuadrada del segmento ED que son 1,51m al cuadrado más el segmento DC que son 2,5m al cuadrado*



Lo que hacemos es elevar 1,51m al cuadrado, nos daría 2,28m^2 y elevando 2,5m al cuadrado que nos da 6,25m^2. Entonces sumamos las potencias y la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de 8,53m^2 que es igual a 2, 92m.

L4-P: *En la situación ¿Qué significan esos 2,92m que su compañera acabo de calcular?*

L5-E.2.2: *Es la medida de la longitud de la línea visual del compañero mirando hacia el espejo, esa es la hipotenusa del triángulo pequeño.*

La situación buscaba forjar en ambos Casos el Nivel de reflexión sobre un resultado, referente a la medida obtenida al aplicar el *Teorema de Pitágoras*, pero que la contextualizaran con respecto a lo realizado en el parque. Efectivamente tanto *L3-E.1.3* como *L5-E.2.2* reconocen que la *hipotenusa* encontrada representa la medida de la longitud de la *Línea visual* del compañero que le correspondió observar en el espejo. Frente a esta respuesta, se demuestra que los estudiantes no solo desarrollaron un saber matemático, sino que también lograron promover y compartir el significado de uno de los conceptos asociados a *la semejanza de triángulos* (Bishop, 2005, p. 23), en una clase que se convirtió en una comunidad de aprendizaje, donde los participantes a través de su discurso matemático se fueron convirtiendo en miembros de esa comunidad (Sfard, 2008, p.29).

Por lo anterior, el desempeño alcanzado en la actividad matemática de los estudiantes respecto a los descriptores: a) *usa el Teorema* *de Pitágoras para determinar la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo* y b) *el aporte de sus ideas facilita la construcción del significado matemático*; es *Superior* para ambos Casos. Se promueve de esta manera, el Nivel de complejidad de la CMC de Conexión al de Reflexión, dado que explicaron en forma oral, el significado de la hipotenusa en la situación planteada. Se muestra la capacidad de reflexionar sobre el proceso matemático adecuado y lograr lo solicitado en la tarea. Se confirma así, lo que Rico y Lupiáñez (2008) expresan: "los estudiantes reflexionan cuando comprenden y saben expresar de manera oral sobre cuestiones matemáticas que van desde reproducir conocimientos hasta explicar los cálculos y los resultados obtenidos" (p. 263).

Desde la *disposición* se hace evidente que cada estudiante hizo posible su participación gracias a las capacidades y destrezas comunicativas que previamente tenían referente al dominio matemático; por ende, no les fue difícil estar dispuestos a responder a cada una de las preguntas hechas por el profesor, por ejemplo en las situaciones 1 y 2 L1, L3, L5-E.1, L2-E.1.1; y L1, L3-E.1.2 y L7-E.1.3 (Caso1) exponen su discurso de manera coherente. Es indiscutible que su participación en la solución de la actividad se sustenta porque todos lograron comunicarse en el lenguaje de esta comunidad, al compartir sus reglas, al ser parte integral del grupo y ser un participante activo (Sfard, 2008, p.29). Esto no significa que el Caso dos no haya estado dispuesto a solucionar la demanda de cada pregunta; se resalta en ellos, cómo en las situaciones afloran su participación; además, dejaron ver que su voluntad de participar en el discurso fue mediada por la motivación para dar un discurso de calidad, con coherencia y argumentos matemáticos.

Por la *disposición* que presentaron los estudiantes se alcanzaron los descriptores: a) *con sus actitudes Muestra la disposición para el desarrollo de las tareas* y b) *muestra interés porque su discurso oral y/o escrito sea cada vez de mejor calidad.* Los cuales aportan articuladamente al desarrollo de los procesos cognitivos de la CMC y especialmente en la actividad discursiva de los estudiantes.

En cuanto al *deseo,* se observa que los integrantes de cada equipo de trabajo reflejan el interés y la motivación en querer hacer parte de la actividad de aprendizaje, pues disfrutan de ella y la ven como un *reto;* al querer saber cuál es la verdadera altura del árbol y, por tanto, sobresale el compromiso de participar activamente de ella. Esto favorece, sin ninguna duda, los desarrollos cognitivos de cada equipo cuando responden la situación propuesta. Para este proceso los estudiantes alcanzan los descriptores: a) *toma decisiones coherentes, analizando las diversas posibilidades, sus consecuencias y justificando la opción tomada*, b) *participa activamente en el desarrollo de las actividades matemáticas de aula* y c) *demuestra iniciativa (realiza y propone) en la toma de decisiones*.

Por tanto, se resalta que su rendimiento se vio influenciado en cierta medida, en la *dedicación* que tuvo cada Caso al tomar las medidas de longitud en el parque y enfrentar las dificultades encontradas en el terreno en donde estaban ubicados los árboles, como: el sonido producido por agentes que hacen parte de ese contexto (ruido de vehículos, curiosidad y murmullo de los transeúntes, sonido de grupos musicales, entre otros). Así mismo, en los roles que asumió cada estudiante en la actividad y desde el instante en que pusieron en juego sus capacidades y conocimientos matemáticos para dar solución a la tarea planteada.

En consecuencia, cada equipo consiguió promover los descriptores: a) *muestra actitudes de liderazgo positivo en el desarrollo de las actividades matemáticas*, b) *continúa con el desarrollo de la actividad matemática a pesar de las dificultades encontradas*, c) *demuestra su aprendizaje a través de la participación dinámica y efectiva en el equipo* y d) *constantemente muestran dedicación por promover con su discurso la construcción del significado matemático.* Los anteriores descriptores muestran el significativo grado de dedicación y continuidad que tuvieron los estudiantes en el abordaje de la tarea y que de manera voluntaria cumplieron con la actividad, aun cuando algunas situaciones, implicaron demandas cognitivas de alto nivel. En las figuras 6 y se dan evidencias de estas aseveraciones:

Figura 6. Fotografía 6. Caso 1 y 2-toma de medidas en el parque

Figura 7. Fotografía 7. Caso 1 y 2-solucionando el conjunto de situaciones en plenaria

Conclusiones

El desarrollo de esta investigación deja ver que es necesario que el profesor identifique, seleccione, diseñe, construya e implemente las tareas que va a plantear a los estudiantes para lograr en ellos, movilizar los niveles de Complejidad de las Competencias Matemáticas. Es importante tener claro cuál es la finalidad de ésta para así poder seleccionar aquellas que puedan ser adaptadas y estructuradas de acuerdo a las previsiones hechas en los objetivos de la clase.

En una misma tarea se puede establecer de manera estratégica preguntas, procesos, actividades o situaciones problema que induzcan al estudiante a movilizar los niveles de complejidad de las Competencias Matemáticas; cada una de las tareas propuestas se adaptaron e implementaron para movilizar los Niveles: Reproducción – Conexión – Reflexión, en ambientes de aprendizaje diferentes.

Se observó en el análisis de las actividades matemáticas de aprendizaje, que aunque las situaciones se diseñaron para que los Caso promovieran el Nivel de Reproducción al de Conexión o de éste al de Reflexión se presentaron respuestas que se mantenían aún en el Nivel de Reproducción. Esto se pone de manifiesto por las acciones cognitivas que realiza el sujeto, es decir, por el modo en que moviliza sus competencias.

Los estudiantes aprenden y movilizan los niveles de complejidad de la Competencia Matemática desde lo que se desarrolle en las clases. De ahí la importancia de la tarea y de cómo ésta es implementada y solucionada en el aula, dado que son las tareas las que determinan la actividad matemática de aprendizaje de los estudiantes. En relación con la CMC, las tareas deben ir encaminadas a generar espacios en los que los escolares tengan la oportunidad de explicar y desarrollar argumentos matemáticos tanto en forma oral como escrita.

Para contribuir a la movilización de los niveles de complejidad de la CMC en estudiantes de grado noveno, se hace necesario que las tareas matemáticas que se le plantean estén elaboradas y estructuradas de tal manera que en ellas queden claramente definidas las expectativas de aprendizaje, las cuales son, además de los objetivos concretos de la parte cognitiva, aquellos aspectos que encierran la noción de Competencia Matemática Comunicar.

El desarrollo de las tareas, o la actividad matemática de aprendizaje debe generar un ambiente participativo y colaborativo en el que se aprecien actitudes y valores como la solidaridad, la tolerancia y el respeto por las acciones del otro y por los otros. Se ha de favorecer la formación de ciudadanos y el desarrollo de los propósitos de mejoramiento de los aprendizajes de los conceptos asociados al objeto matemático en estudio; es decir, escenarios que propicien oportunidades para que los estudiantes negocien y compartan socialmente el significado matemático, desarrollen habilidades comunicativas desde su forma oral y escrita, donde las interacciones entre los estudiantes y entre éstos y el profesor, instauren tanto formas de trabajo como relaciones sociales, culturales, interpersonales y comunicativas en una comunidad de aprendizaje: la clase de matemáticas.

Por estas razones, es necesario que los profesores de matemáticas generen ambientes de aprendizaje participativo en donde se dé tiempo a que los estudiantes puedan explorar la tarea y se familiaricen con ella, pues como se mostró en *la feria*, cuando el estudiante se hace parte activa de la construcción del conocimiento, moviliza, no solo el componente cognitivo de la CM sino también los aspectos: volitivo y la tendencia de acción. Igualmente en esa tarea se muestra cómo sacar provecho a los espacios y materiales y recursos del entorno.

Una de las estrategias empleadas para evaluar la movilización de los Niveles de Complejidad de la CMC es construir con base en la posible solución de las tareas, un conjunto de descriptores que den muestra del desempeño de los estudiantes y sus actuaciones en los tres aspectos asociados a la CMC; es decir, se construyen descriptores para los aspectos: Cognitivo, Afectivo y la Tendencia de Acción en relación con los procesos de *leer*, *comprender, la actividad discursiva*; la *disposición* y el *deseo* y la *dedicación* respectivamente; que articulados con las tareas matemáticas dieron evidencia de la importancia de valorar el desempeño de los escolares no sólo en lo cognitivo, sino que también permiten cualificar sus actuaciones en relación a actitudes y emociones durante el desarrollo de la actividad matemática de aprendizaje a partir de cada una de las situaciones propuestas.

Los descriptores, se convierten en una herramienta fundamental en la planeación y/o elaboración de una tarea, puesto que son los que permitirán observar si los estudiantes movilizan o no los conocimientos sobre un contenido específico al enfrentarse a la resolución de situaciones problemáticas con un nivel de exigencia cognitiva cada vez mayor. A la vez, son el instrumento del docente para valorar en los estudiantes la actitu d de querer solucionar con compromiso, disposición y dedicación el reto que se les plantea a través de la tarea.

Referencias Bibliográficas

Arévalo, A. (2012). *Comunicacion Matemáticaen el aula: Uso y gestión de Estrategias*. Concepción: Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Bishop, A. J. (2005). *Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática*. Calí: Universidad del Valle.

D'Amore, Godino, J. D., & Fandiño, M. (2008). *Competencias y Matemática*. Bogotá, Colombia.

García, B. (2013). Componentes de un modelo teórico para el desarrollo de Competencias Matemáticas en los estudiantes. *Amazonía Investiga*, 2 (1), 147-160. Recuperado de http://www.udla.edu.co/revistas/index.php/amazonia-investiga/issue/view/2/showToc

García, B., Coronado, A., Montealegre, L., Giraldo, A., Cortés, D., & Tovar, B. (2013). *Competencias Matemáticas y Actividad matemática de Aprendizaje*.

Florencia: Universidad de la Amazonía.

García, B., Coronado, A., Montealegre, L., Tovar, B., Giraldo, A., Morales, S., & Cortés, D. (2012). *Competencias Matemáticas: Un estudio Exploratorio en la Educación básica y media*. Florencia: Universidad de la Amazonía y Colciencias.

Goñi, J. (2008). *3 ^ 2-2 Ideas Claves El desarrollo de la Competencia Matemática*. Barcelona: Graó.

Montealegre, L., & Coronado, A. (2011). *Competencias Matemáticas: Primeras aproximaciones*. Recuperado de www.elitv.org/documentos/maestria/ Memorias2011/Ponencia%203.pdf

Niño, V. (1994). *Los Procesos de La Comunicación y el Lenguaje*. 2da ed. Santa fé de Bogotá: Presencia . Recuperado de http://www.apa.org/helpcenter/willpower-spanish.pdf

Núñez, J. C. (2009). *Motivación, aprendizaje y rendimiento académico*. Recuperado de www.wikipedia.com

OCDE. (2006). *PISA Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. Madrid: Santillana.

Rico, L., & Lupiáñez, J. (2008). *Competencias Matemáticas desde una Perspectiva Curricular*. Madrid: Alianza

Sánchez, P. y Martínez, M. (2013). *Una Caracterización de la Competencia Matemática Representar: El caso de la Función Lineal*. Florencia: Universidad de la Amazonía.

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las Matemáticas escolares desde un Enfoque Comunicacional*. Cali: Universidad del Valle.