EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y LA COMPETENCIA MATEMÁTICA. UNA APROXIMACIÓN DESDE EL ESTUDIO DE LOS CUADRILÁTEROS

[1]Cesar Augusto Morales Chávez

Recibido: 2 de Abril del 2012. Aceptado: 28 de junio del 2012

RESUMEN

Este artículo es producto de una investigación para contribuir al desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de la competencia matemática formular y resolver problemas, mediante el estudio del objeto matemático cuadriláteros con mediación de un programa de geometría dinámica, en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José Eustasio Rivera del municipio de Pitalito-Huila.

La investigación se desarrolló en dos fases, la fase I denominada diagnóstico, permitió determinar la relación entre el currículo propuesto por las políticas nacionales del MEN y lo realizado por la Institución Educativa objeto de estudio. Se analizó el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en las aulas escolares y determinó el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes sobre el objeto matemático. Los resultados del diagnóstico, pusieron en evidencia que los errores y dificultades de los estudiantes se centran en tres fenómenos didácticos: estereotipos–misconcepciones, déficit de clasificaciones inclusivas y no-congruencia.

En la fase II, se diseñó la propuesta didáctica sustentada a partir de autores e investigaciones como Gómez (2007) para el análisis de contenido, las comunidades de aprendizaje articuladas con la forma de entender la clase en la propuesta de Bishop (2005) y el modelo teórico propuesto por Van Hiele.

[1] Par académico evaluador de la Revista Internacional de Investigación en Educación *Magis*. Universidad Javeriana. Miembro del grupo de investigación: Desarrollo Institucional Integrado. Universidad de la Amazonía. Profesor de matemáticas y física de la Institución Educativa Jesús María Basto en Pitalito (Huila). Licenciado en matemáticas y física, magister en ciencias de la educación de la Universidad de la Amazonía, Colombia. Correo: paponex@hotmail.com

Palabras clave. Pensamiento espacial. Competencia matemática. Formular y resolver problemas. Cuadriláteros. Sistemas de representación.

Abstract.

This article is the result of a research Project conducted to contribute to the development of spatial thinking and mathematical competence levels, formulating and solving problems through the study of quadrilaterals with the mediation of a dynamic geometric program. It was developed with seventh graders at Jose Eustasio Rivera high school in Pitalito – Huila.

The research was developed in two phases. Phase I allowed to determine the relation between curriculum proposed by national policies, MEN and what was done by the school. It was analyzed the teaching and learning processes in geometry class. It determined students' geometric reasoning level on the mathematic object. The results evidenced that students' mistakes and difficulties were centered on three didactic phenomena. Stereotypes-misconceptions, deficit in inclusive classifications and no-congruence.

In Phase II was designed the didactic proposal based on authors and research projects such as Gomez (2007) for the analysis of the content, learning communities linked with the way to understand the class in Bishop proposal (2005) and the theory model proposed by Van Hiele.

Key words. Spatial thinking. Mathematical competence. Formulating and solving problems. Cuadrilaterals. Systems of representation.

INTRODUCCIÓN

Este artículo es uno de los productos del trabajo de investigación desarrollado como propuesta de grado para optar al título de maestría en Ciencias de la Educación en la universidad de la Amazonía, cuyo objetivo general fue contribuir al desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de la competencia matemática formular y resolver problemas, mediante el estudio del objeto matemático cuadriláteros con el apoyo de un programa de geometría dinámica, con estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria en la Institución Educativa José Eustasio Rivera del municipio de Pitalito – Huila.

Para lograr el propósito anterior, se consideraron dos momentos o fases dentro del proyecto: la primera fase denominada diagnóstico permitió determinar el alcance de la política nacional en relación con la propuesta institucional en torno al pensamiento espacial y las competencias matemáticas. Así mismo, se logró analizar cómo se estaba llevando a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría y determinar cuál era el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes en el estudio de los cuadriláteros. La fase dos muestra el diseño de una propuesta didáctica en la que se establecen los referentes conceptuales y la ruta metodológica como una posible salida a la problemática analizada durante la fase anterior. En general el proyecto de investigación se estructuró en seis capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo uno se efectuó el balance de investigaciones que a nivel internacional, nacional y regional se han realizado en el campo de la didáctica de las matemáticas en relación con el objeto y tema de estudio. Lo anterior, entre otras cosas para brindarle pertinencia al proyecto de investigación. En particular se centró la atención en estudios sobre los cuadriláteros dentro de la matemática escolar, su relación con el modelo de razonamiento geométrico propuesto por los esposos Van Hiele, errores en su enseñanza y la geometría dinámica como herramienta para su aprendizaje; además, se tuvo en cuenta la formulación y resolución de problemas como eje articulador en la enseñanza de la geometría.

En el capítulo dos se realizó el planteamiento y la formulación del problema a investigar, indagando acerca del cómo contribuir al desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de la competencia matemática formular y resolver problemas en el estudio de los cuadriláteros apoyados en un programa de geometría dinámica. Así mismo, se justificó la investigación desde tres puntos de vista:

Teórico: por la relevancia que tiene la naturaleza y el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes.

Práctico: Los cuadriláteros tienen pertinencia curricular y se ubican como un objeto matemático a estudiar en las aulas escolares; además, por su riqueza conceptual y la multiplicidad de significados que posee.

Científico y social: por la contribución al desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de la competencia matemática formular y resolver problemas en estudiantes de educación básica, centrando la atención en contextos significativos propios de la región donde se encuentra ubicado el proyecto de investigación.

El capítulo tres ilustra la perspectiva metodológica de la investigación, la cual asumió un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo. Además se recurrió al postulado de complementariedad de métodos; es decir, la convergencia entre los métodos cualitativos y cuantitativos en el que se realizaron diversas triangulaciones de la información para obtener un tratamiento integral de la misma.

El capítulo cuatro presenta los referentes teóricos que enmarcaron y delimitaron el estudio. Se realizaron atendiendo a las siguientes categorías de análisis: a. pensamiento espacial y competencias matemáticas. b. Objeto matemático de estudio: cuadriláteros. c. La resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento espacial. d. Niveles de Van Hiele. Las categorías mencionadas anteriormente conforman el sustento por el cual se vierten todos los capítulos de la investigación y se emplearon para determinar tanto los instrumentos de recolección de la información como en el análisis de la información y las conclusiones del proyecto.

La figura 1 muestra esquemáticamente las categorías de análisis y sus relaciones en torno a los propósitos de la investigación:

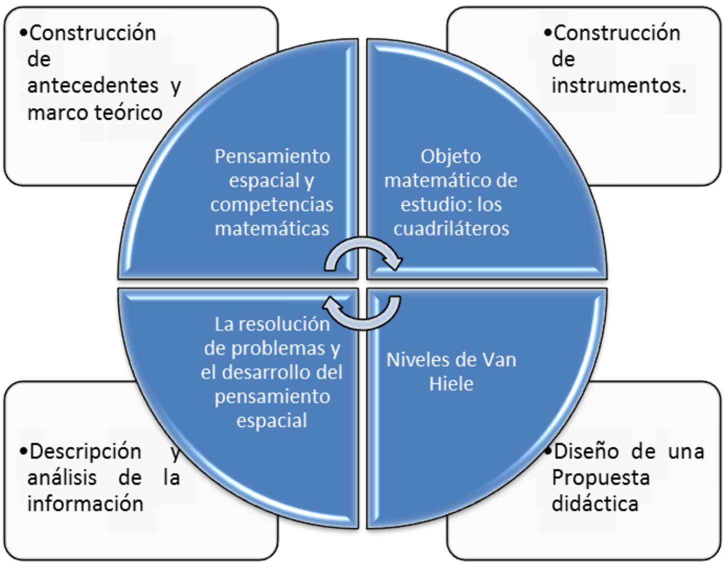


Figura 1. Categorías de análisis de la investigación.

El capítulo cinco ilustra la descripción y el análisis de los resultados encontrados específicamente durante la fase de diagnóstico. Para ello se establecieron unas categorías de análisis en las que se tuvo en cuenta:

La documentación Nacional en relación con la institucional referente a las concepciones generales sobre matemáticas, competencias matemáticas, organización curricular, pensamiento espacial y el objeto matemático cuadriláteros y sus sistemas de representación.

La voz de los profesores mediante sus concepciones en relación con el pensamiento espacial, las competencias matemáticas, el propósito de enseñar geometría y la forma de organización de la clase. Así mismo se centró la atención en las acciones del profesor analizadas por sus estudiantes y por el grupo investigador.

La voz de los estudiantes en relación con sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la institución, su importancia, naturaleza, formas de organización, desarrollo y evaluación de la asignatura. Así mismo, las respuestas de los estudiantes en las actividades de trabajo conjunto e individual permitieron inferir tres tipos de errores o dificultades: el fenómeno de los estereotipos y las misconcepciones, el fenómeno de la no-congruencia y el déficit de clasificaciones inclusivas realizadas por ellos respecto al objeto matemático cuadriláteros.

El capítulo seis muestra el diseño de una propuesta didáctica que responde a las problemáticas encontradas durante la fase de diagnóstico. En ella se encuentran los referentes conceptuales y sugerencias metodológicas que el profesor puede tener en cuenta para la enseñanza y el aprendizaje de los cuadriláteros como objeto de estudio. En particular, el proyecto de investigación aportó algunas actividades en las que se tienen en cuenta el modelo de Van Hiele específicamente las fases de aprendizaje. Dichas actividades incorporaron elementos del contexto sociocultural del estudiante al aprendizaje de las matemáticas y reconocen que el concepto de competencias va más allá del manejo de los contenidos disciplinarios, de esta manera, en el estudio de los cuadriláteros se pretende que el estudiante identifique, reconozca y aprenda de otros saberes sociales, por ello la investigación se articuló al proyecto de media técnica desarrollado en la institución educativa denominado escuela y café.

Finalmente se determinaron las conclusiones, recomendaciones y contribuciones de carácter teórico y didáctico que el proyecto logró evidenciar durante todo el proceso investigativo.

METODOLOGIA

El proyecto de investigación optó por un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo. Así mismo se tuvo en cuenta algunos datos cuantitativos los cuales fueron seleccionados bajo un criterio de prioridad y relevancia. Lo anterior permitió realizar diversas triangulaciones de la información para obtener un tratamiento integral de la misma; es decir, se recurrió al postulado de la complementariedad: la convergencia entre los métodos cualitativos y cuantitativos los cuales se emplearon en diferentes momentos.

De acuerdo con lo anterior, la investigación se dividió en dos fases: la fase I denominada diagnóstico, en la cual se determinó la relación existente entre el currículo propuesto por las políticas nacionales del MEN y lo realizado por la Institución Educativa objeto de estudio. Así mismo, se analizó el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en las aulas escolares y se determinó el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado 7° sobre el objeto matemático cuadriláteros.

La fase dos consistió en la propuesta didáctica en torno a los cuadriláteros. En particular, se elaboraron actividades en las que se tuvo en cuenta el contexto social y económico de la región relacionadas con el proyecto escuela y café y, que teóricamente se consideran una alternativa que contribuye al desarrollo del pensamiento espacial, y la superación de los fenómenos didácticos encontrados en los estudiantes que participaron en esta investigación.

Entorno, Población y Muestra.

El estudio se realizó en la institución educativa José Eustasio Rivera del municipio de Pitalito, en el departamento del Huila, institución de educación básica y media de carácter oficial. La población objeto de estudio estuvo conformada por profesores del área de matemáticas de educación básica secundaria y media, y estudiantes de grado séptimo.

La muestra fue seleccionada teniendo en cuenta que tanto profesores como estudiantes decidieron participar voluntariamente; es decir, la muestra no fue intencional. En ese sentido, se trabajó con 40 estudiantes de un total de 160, lo cual corresponde al 25% de la población estudiantil y, 3 profesores de los 5 que conforman el comité de área de matemáticas de la institución y corresponde al 60% de la población.

Instrumentos.

Todos los instrumentos de recolección de la información fueron aplicados durante la fase de diagnostico. En este sentido, se implementaron dos rejillas de evaluación las cuales permitieron analizar los referentes Nacionales e institucionales en torno a las concepciones generales de la matemática, su organización curricular y la propuesta de enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático. Así mismo se indagó respecto a las concepciones de competencias y al objeto matemático cuadrilátero en relación con sus sistemas de representación.

Para determinar el estado actual del proceso de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del pensamiento espacial en la institución Educativa José Eustasio Rivera, se aplicaron dos encuestas tanto a docentes como a estudiantes. La encuesta a profesores se constituyó en tres bloques de preguntas, el primero de ellos referido a las concepciones sobre pensamiento espacial, competencias matemáticas y propósito de enseñar geometría; el segundo estuvo delimitado en torno a aspectos puntuales de la geometría como son: formas de organizar y desarrollar la clase, recursos didácticos, método (específicamente la resolución de problemas) y evaluación; el último bloque abordó la especificidad del objeto matemático en particular: los cuadriláteros, su importancia, representación y utilidad en diversos contextos. La encuesta dirigida a estudiantes se realizó para saber la opinión sobre la enseñanza de la geometría en la institución, las formas de organización, desarrollo y evaluación de la asignatura. Esta encuesta presentaba dos tipos de preguntas: una abierta relacionada con la importancia de aprender geometría y otra de carácter semiestructurado, donde se abordaba el tratamiento de los cuadriláteros en cursos anteriores.

Para contrastar la información obtenida en las encuestas descritas anteriormente y apuntar a la caracterización de las prácticas de enseñanza desde la mirada de los investigadores se concibió el uso de la guía de observación. Para ello, se establecieron las siguientes categorías de análisis: organización, desarrollo de la clase, relación profesor y estudiante, contenidos tratados, utilización de recursos didácticos, sistemas de representación empleados, situaciones trabajadas en clase; sobre las cuales se procedió a indagar a través de la observación de clase en tres sesiones de trabajo conjunto entre el profesor de geometría y los estudiantes.

Para el posterior análisis, se realizó una triangulación metodológica de la información, es decir, entre los datos aportados por la documentación nacional e institucional, las encuestas y la observación directa. En términos de Jick (1979), las técnicas cualitativas y cuantitativas son complementarias y la habilidad de combinarlas permite aprovechar los puntos fuertes de cada una de ellas y cruzar los datos.

A continuación se presenta un gráfico que condensa los elementos que componen los grupos temáticos formulados para la descripción y análisis de los instrumentos descritos hasta el momento.

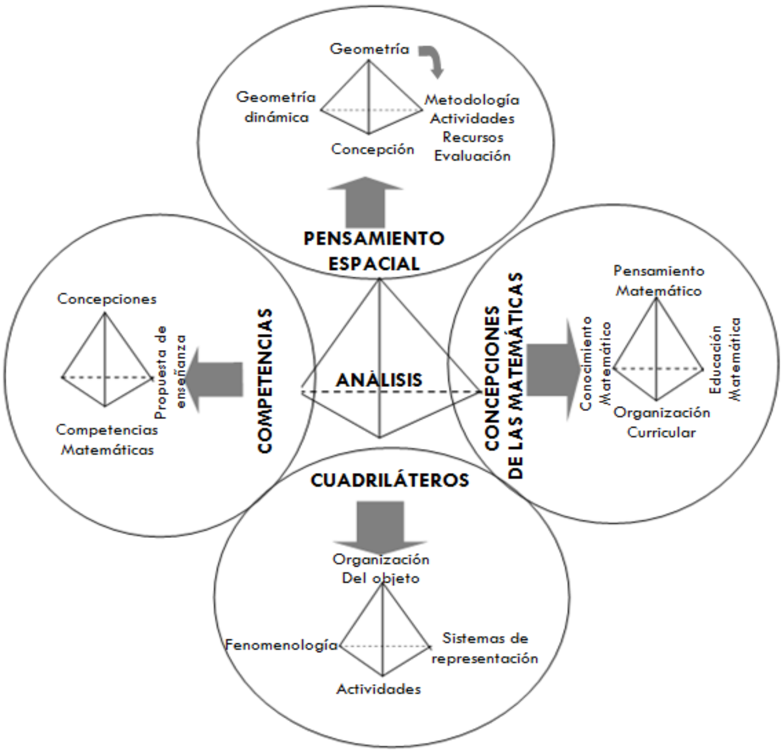


Figura 2. Grupos temáticos: rejillas de evaluación, encuestas y guía de observación.

Para establecer el nivel de desempeño de los estudiantes en el pensamiento espacial, se concibió una actividad de conocimientos previos constituida por 15 preguntas (Ver anexo1), las cuales fueron establecidas por grupos de preguntas para contribuir en la caracterización del nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes, de acuerdo con los niveles de Van Hiele. En particular, cada tipo de preguntas se identifica en la teoría de Van Hiele de la siguiente manera:

Niveles de razonamiento geométrico (Modelo de Van Hiele)	Análisis de ítem
Visualización: en el nivel de visualización los estudiantes identifican, nombran, comparan y operan sobre figuras geométricas de acuerdo con su apariencia global, además, cada figura geométrica es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase.	Cuadrado. Rombo. Rectángulo. Cuadrado. Paralelogramos.
Análisis: en este nivel de razonamiento, los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. De esta manera, se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades.	Cuadrado Rectángulo Rombo. Trapezoides y rombos
Deducción informal: los estudiantes pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con la de otras figuras; es decir, se comprende la existencia de relaciones y se descubren nuevas relaciones. De igual forma, los estudiantes en este nivel pueden realizar clasificaciones inclusivas.	Cuadrado y rectángulo. Propiedades Rectángulo, paralelogramo.
Situaciones problémicas: se ha decidido guardar distancia de los planteamientos que identifican a un estudiante que se encuentra en el nivel 4 de razonamiento geométrico según la teoría de Van Hiele, en relación con la deducción y demostración de teoremas, haciendo uso de axiomas, postulados, definiciones, porque según el registro de antecedentes investigativos en este aspecto, aún en	Armado de figuras. Semejanza, congruencia. Construcción de objetos tridimensionales.

estudiantes universitarios es complejo el trabajo lógico-deductivo y ellos no superan los niveles 1 y 2, además en los niveles de educación básica y media no se asume el trabajo demostrativo de la geometría, por ello se resolvió indagar específicamente por el nivel de desarrollo de los estudiantes para relacionar el objeto matemático cuadriláteros en la solución de tres situaciones problémicas.	

Tabla 1. Actividad de conocimientos previos.

Para profundizar aún más en el estudio de los cuadriláteros se realizó una actividad conjunta con los estudiantes que permitió conocer las razones que justificaban la elección de respuesta a determinadas preguntas; y así, obtener mayores indicadores para que el nivel asignado verdaderamente representara el nivel predomínate de pensamiento exhibido por el estudiante en las dos actividades, es decir, un nivel preferido de razonamiento. (Burger & Shaughnessy, 1986). De esta manera, se seleccionaron 4 preguntas de la actividad de conocimientos previos, una por cada nivel y una situación problémica (Anexo 1. Ítems: 2, 7, 12, 14), que fueron analizadas, discutidas y socializadas por los estudiantes.

La elaboración de todos los instrumentos para la investigación tuvo mayor confiabilidad al ser sometidos a un proceso de pilotaje. En particular, este trabajo se realizó con la colaboración de colegas investigadores expertos y una muestra de participantes, tanto profesores como estudiantes que contaron con características similares a la de los sujetos de estudio y que brindaron información sobre las posibles dificultades de los instrumentos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Del currículo propuesto al currículo desarrollado.

Un primer balance da cuenta de la relación o divergencia entre el currículo propuesto (por instancias oficiales como el MEN e ICFES y la Institución Educativa José Eustasio Rivera), y el currículo desarrollado (a partir de la mirada de profesores, estudiantes de la Institución Educativa e investigadores) para consolidar el estado actual acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría para el desarrollo del pensamiento espacial en la Institución Educativa. De esta manera, fue posible determinar que:

Existen diferencias entre el currículo propuesto tanto a nivel nacional como institucional y el currículo desarrollado en las clases de geometría, lo anterior se evidencia a partir del análisis de las concepciones expuestas por los profesores sobre elementos que se explicitan como directrices generales de la asignatura a orientar y de las cuales se tiene una aproximación inicial – empírica. Al indagar en la especificidad del aula de clase y triangular la información recolectada a partir de la mirada de los profesores–estudiantes–investigadores para dar cuenta de algunas contradicciones que se encontraron entre lo expresado y lo desarrollado.

Complementar la voz de los docentes y la de los estudiantes con la mirada de los investigadores, posibilitó triangular el decir y el hacer de los docentes, y determinar diferencias o puntos de encuentro que pueden existir entre lo expresado, lo que se explicita en sus prácticas y la propuesta general del área.

En ese orden de ideas, existe reconocimiento por parte de los profesores de la importancia de la geometría como disciplina científica, que a partir de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza privilegia y dota de sentido el aprendizaje de la asignatura en los estudiantes; sin embargo, no se implementa como eje transversal en la enseñanza de la asignatura. Por ello, las clases no logran consolidarse como verdaderas comunidades de aprendizaje, donde estudiantes y docente interactúan para construir y validar conocimiento y ponen en evidencia la concepción falibilista de las matemáticas.
En ese sentido, la metodología de enseñanza de la asignatura es tradicional, directamente relacionada con la organización curricular por objetivos y el modelo pedagógico heteroestructurante, desarticulada de las directrices generales y de sus propias concepciones, que reconocen en la resolución de problemas un eje organizador y las herramientas computacionales como medio que potencia el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes; sin embargo, existe una actitud positiva por parte de los estudiantes hacia la forma en que se orienta la asignatura en la institución, por la adaptación que han alcanzado en dicha metodología.

Se reconoce la importancia por desarrollar competencias matemáticas en los educandos desde la asignatura; no obstante, se evidencian falencias en la concepción del término y el diseño de actividades concretas que favorezcan y potencien el desarrollo de éstas. Lo ideal es que docentes y estudiantes reconozcan la importancia de la geometría a partir de su utilidad práctica, no sólo en la disciplina sino en diversos contextos. Por ello, es importante que desde las clases se proporcionen "experiencias diversificadas basadas en tareas matemáticas ricas, realizadas en un ambiente de aprendizaje estimulante"(Bishop & Goffree, 1986, p. 309); es decir, diseñar prácticas que evidencien la diversidad de fenómenos presentes en un mundo que es eminentemente geométrico y no sólo situaciones relacionadas con el uso de herramientas convencionales y sus aplicaciones dentro de la geometría como se encontró en la observación de clase.

En ese sentido, D'Amore, Fandiño & Godino. (2008) afirman que lo que generalmente aleja la matemática de los estudiantes es la forma como se les presenta, por ello, el fracaso en su estudio radica en la falta de interacción entre el mundo real y los contenidos matemáticos, "la imposibilidad de hacer y usar la matemática más allá del tiempo y del espacio estrictamente escolar" (p.54).

Lo anterior guarda relación con las concepciones de los profesores sobre competencias matemáticas, las cuales según ellos, permiten enfrentarse de manera eficiente a diversas situaciones prácticas, y contribuyen al desarrollo cognitivo de los estudiantes; esto a partir de expresiones como: «…el desarrollo de estas competencias permite a los estudiantes aplicar los conocimientos enfrentándose a diversas situaciones, que las puedan interpretar, argumentar y proponer soluciones», «…el fomento de dichas capacidades herramientas útiles para demostrar que es socialmente competente, ya que es una persona capaz de razonar, argumentar, interpretar y proponer soluciones eficaces a los distintos problemas que se le puedan presentar»; sin embargo, persiste la concepción de competencias matemáticas relacionadas con interpretar, argumentar y proponer, que son competencias generales a todas las áreas, establecidas por el ICFES desde el 2000 en sus propósitos evaluativos y asumidas en la actualidad por la Institución Educativa donde se lleva a cabo este estudio.

De acuerdo con esto, se evidencia que la institución y los profesores disponen de un nivel inicial en sus concepciones sobre competencias matemáticas, porque aún persisten en la propuesta evaluativa del ICFES (2000), que ha sido redefinida por ellos mismos en ICFES (2007) a partir de los planteamientos hechos por el MEN (1998, p.35; 2006, pp. 50-56), que guardan relación con los procesos generales enunciados como ejes temáticos presentes en toda la actividad matemática, que explicitan lo que significa ser matemáticamente competente y pueden ser evaluados de manera más detallada a partir de la propuesta del proyecto OCDE/PISA (2004).

Es evidente la importancia y claridad conceptual que tienen los profesores respecto al objeto matemático cuadriláteros, así mismo, la diversidad de aplicaciones que pueden ser implementadas a diferentes contextos; pero existen falencias en relación con la concepción y utilización de los diversos sistemas semióticos de representación para el objeto y la implementación de situaciones problémicas en contextos diferentes al geométrico–matemático donde el estudiante puede darle sentido el aprendizaje de la asignatura.

Nivel de desarrollo de pensamiento espacial en los estudiantes.

Nivel 1: ítems 1, 2, 3, 4, 5.

Para profundizar en el nivel 1 de razonamiento geométrico, según el modelo de Van Hiele, se indagó a los estudiantes sobre los estereotipos y el reconocimiento de ciertas figuras. (Ver anexo 1. Item7). En particular, los estudiantes manifestaron «Solamente U y V, porque tienen forma de rombo y sus lados son iguales», «Solamente U y V porque sus lados son iguales mientras que los otros son rectángulos porque su forma es diferente, y se reconoce fácilmente por su forma, los dos son rombos pero U es más pequeño que V», «La B, porque sus medidas son iguales y se reconoce porque tiene una forma distinta a las demás figuras». De esta manera, se puede inferir el reconocimiento del cuadrado y el rombo de acuerdo con la transformación en el sentido nombre↔figura, característica propia de estudiantes que se encuentran en el nivel 1 del modelo de Van Hiele.

De acuerdo con las justificaciones hechas por los estudiantes, respecto al rombo, rectángulo y cuadrado y las posibles relaciones entre dichas figuras, se evidencia el fenómeno didáctico de los estereotipos, que en D'Amore (2006), se relaciona con la misconcepción, esto es, "concepciones no correctas, eventualmente en espera de sistematización cognoscitiva más elaborada y crítica y por lo tanto constituye un evento de evitar" (pp.138-154), debido a que el maestro propone una imagen fuerte y convincente que se convierte en persistente, confirmada por continuos ejemplos y experiencias de un determinado concepto pero que aún no corresponde al modelo que se espera; es decir, la imagen que engloba el máximo de las informaciones y se demuestra estable con respecto a las solicitudes que hace el concepto de un objeto matemático.

Nivel 2: ítems 6, 7, 8, 9.

El nivel 2 según la teoría de Van Hiele se denomina análisis. Para Jaime (1993) en este nivel de razonamiento, los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. De esta manera, se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. En términos de Duval (2004) se hace referencia a actividades de tratamiento y conversión, en y entre, registros semióticos de representación.

A partir de los resultados encontrados del ejercicio de conocimientos previos y la actividad de clase para este nivel es posible concluir de acuerdo con Duval (2004) que: no hay objetivación por parte de los estudiantes sobre el objeto matemático cuadriláteros, sus propiedades, tratamiento y conversión a partir de sus representaciones. El lenguaje utilizado no evidencia mayor rigurosidad geométrica y, de acuerdo con Fouz (2006), la progresión, en y entre los niveles, va muy unida a la mejora del lenguaje matemático necesario en el aprendizaje. Por ello, el nivel 2 de Van Hiele es el momento en el que se habla de un razonamiento matemático inicial; es decir, los objetos geométricos ya no se identifican simplemente de manera global (se parece a…, tiene la forma de… es como…), con atributos irrelevantes como la forma o el tamaño, limitándose a describir el aspecto físico de las figuras, propio del nivel 1, sino, reconocen que las figuras geométricas están formadas por partes, dotadas de propiedades matemáticas y utilizan un vocabulario adecuado para explicar esas razones. Esto se demuestra en afirmaciones de los estudiantes como: «la respuesta es la D porque los lados tienen diferente medida», «la D porque los lados opuestos no tienen la misma medida, porque los lados de arriba y de abajo son más diferentes que el de los lados y tienen distintas medidas»; «la D porque los lados GK y GH tienen diferente medida», «nosotros coincidimos en que era la D porque todos sus lados no son iguales están formados por dos más largos y dos más cortos». (Ver anexo 1. Item7).

Nivel 3: ítems 10, 11, 12.

En el nivel 3 de razonamiento geométrico (deducción informal), desde el modelo de Van Hiele, según Jaime (1993), los estudiantes pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con la de otras figuras; es decir, se comprende la existencia de relaciones y se descubren nuevas relaciones.

En ese orden de ideas, del anexo 1 se seleccionó el ítem 10 para ser discutido por los estudiantes en la actividad en clase, que indaga por el nivel de desarrollo de los estudiantes para realizar una clasificación inclusiva entre el cuadrado y el rectángulo; y así, determinar si se construyen conceptos matemáticamente correctos, es decir, en lugar de definir las figuras mediante listas exhaustivas de propiedades, característica de un estudiante que se encuentran en un nivel 2 del modelo de Van Hiele, ellos logran identificar conjuntos mínimos de propiedades que especifican la figura.

En esta pregunta, los estudiantes seleccionaron distintas opciones de respuesta; sin embargo, en la actividad en clase, todos prefirieron la opción E por razones como: «porque tienen uno o más ángulos rectos y tienen dos lados continuos desiguales y dos largos», «la E porque los rectángulos tienen cuatro lados y dos son más largos que otros», «la respuesta es la E porque Q y R tienen la misma forma sino que R es más ancha y Q es más larga y la P es un cuadrado»; es decir, se evidencia en ellos a la hora de dar razones a sus respuestas, la denominada misconcepción, porque expresan nociones desacertadas, sin la rigurosidad matemática que define un objeto en particular, por tanto, la imagen que han construido de dicho concepto no corresponde a las exigencias del mismo y lo reconocen sólo a partir de estereotipos.

En general, de acuerdo con el análisis realizado sobre este grupo de preguntas, se puede inferir que los estudiantes en un alto porcentaje hacen clasificaciones no inclusivas; es decir, no consideran que un cuadrado sea un rectángulo, o que todo cuadrado sea un rombo, esto está en relación con los planteamientos de De Villiers (1994), el cual describe dos clasificaciones diferentes para los conceptos matemáticos: una clasificación jerárquica hace referencia a la clasificación de un conjunto de conceptos de tal manera que los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales y una clasificación por partición, donde los subconjuntos de conceptos son considerados disjuntos unos de otros.

Nivel 4: ítems 13, 14, 15.

El nivel 4 de la teoría de Van Hiele se denomina deducción formal. Según Jaime (1993) en este nivel de razonamiento los estudiantes pueden reformular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje formal, y se pueden realizar demostraciones mediante razonamientos deductivos. Sin embargo, dada la importancia que esta investigación le proporcionó a la formulación y resolución de problemas como filosofía natural de las matemáticas en la que evoluciona y cobra sentido y significado, se decidió guardar distancia de los planteamientos que identifican a un estudiante que se encuentra en el nivel 4 de razonamiento geométrico según la teoría de Van Hiele en relación con la deducción y demostración de teoremas, haciendo uso de axiomas, postulados, definiciones porque según el registro de antecedentes investigativos en este aspecto, aún en estudiantes universitarios es complejo el trabajo lógico-deductivo y ellos no superan los niveles 1 y 2, además en los niveles de educación básica y media no se asume el trabajo demostrativo de la geometría, por ello se ha decidido indagar específicamente por el nivel de desarrollo de los estudiantes para relacionar el objeto matemático cuadriláteros en la solución de tres situaciones problémicas.

De acuerdo con el análisis realizado sobre este grupo de preguntas, en las diferentes situaciones problémicas se puso en evidencia que éstas involucran más que el conocimiento acerca de los cuadriláteros que corresponden a los sistemas geométricos, sistemas como el métrico para relacionar las situaciones con diversos contextos, además, se requiere de concepciones como rotaciones, traslaciones, simetrías, homotecias; es decir, el dominio del registro de representación en lenguaje formal, registro semiótico poco utilizado por los estudiantes en la justificación de sus respuestas y el desarrollo de las clases que fueron objeto de observación en la investigación. Lo anterior se demuestra en expresiones de los estudiantes como «B, porque tienen el mismo perímetro y su área es diferente porque la figura 2 es más grande que la figura 1 esto hace que sean semejantes», «la A porque tienen diferentes perímetros pero su área es igual», «la A porque a diferencia es que tienen diferente perímetro pero sus áreas son iguales porque el perímetro es la suma de todos sus lados», «C porque sus lados son diferentes y de diferente medida y sus ángulos correspondientes son proporcionales», «es la B porque sus lados son iguales sino que el 2 es más grande». (Ver anexo 1. Item14)

Así mismo, fue posible inferir que se requiere la utilización de recursos didácticos en el aula de clase, como por ejemplo la geometría dinámica, la cual, a diferencia de la utilización de herramientas convencionales, permite “manipular de forma más directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando así conceptos matemáticos abstractos y evidenciando propiedades (que en casos habrá que demostrar posteriormente) gracias a las posibilidades de visualización, medición y cálculo” (Marcos, 2008, p. 227).

CONCLUSIONES

En este apartado se establecen las principales conclusiones obtenidas a partir de los objetivos específicos de la investigación, los cuales permiten determinar el alcance de los propósitos y el objetivo general de la misma. De igual manera, se determinan las principales contribuciones de tipo teórico y didáctico y se perfilan sugerencias de continuidad para el estudio.

En relación con el análisis de los referentes bibliográficos, se logró una aproximación a los antecedentes de la investigación, esto permitió ampliar el horizonte de estudio y delimitar el área de investigación. En ese sentido se puede concluir que:

Todos los trabajos analizados en la etapa de antecedentes exponen como temas recurrentes la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, razón por la cual le subyace el desarrollo del pensamiento espacial. Además existe una tendencia marcada respecto a la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación, en particular el software de geometría dinámica.

Se evidencian como temas emergentes o poco tratados los relacionados con los niveles y fases de aprendizaje según la propuesta de Van Hiele implementados sobre el objeto matemático cuadriláteros y en el que se incluyan software de geometría dinámica.

A nivel regional se evidencia la escasa investigación en didáctica de las matemáticas referidas al problema de interés. En ese sentido el presente estudio ayuda a fortalecer los procesos investigativos en la línea de didáctica de las matemáticas en el que se muestran de manera reflexiva y crítica los problemas del contexto escolar en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los cuadriláteros.

Al establecer el estado actual del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la Institución Educativa se logró evidenciar que:

Existen diferencias entre el currículo propuesto a nivel nacional e institucional y el currículo desarrollado en las clases de geometría de la Institución Educativa José Eustasio Rivera. De acuerdo con el diagnóstico, el modelo predominante en las clases de geometría es el heteroestructurante centrado en la transmisión y recepción de contenidos y en las que prevalece el dominio casi exclusivo del sistema representación gráfico y en lenguaje natural por parte del profesor. Con el diseño de la propuesta didáctica, la forma de entender la clase y los roles de profesores y estudiantes se propone una salida a dicha situación, a partir de las actividades propuestas, se elimina la jerarquía en el uso exclusivo de los sistemas mencionados anteriormente y se incluye además el sistema de representación en lenguaje formal en actividades de conversión, tratamiento y comunicación.

En relación con el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes en el pensamiento espacial:

Se encontraron tres tipos de errores o dificultades en los estudiantes relacionados con el fenómeno de los estereotipos y las misconcepciones, el fenómeno de la no-congruencia y el déficit de clasificaciones inclusivas realizadas por ellos respecto al objeto matemático cuadriláteros. Dichas dificultades fueron utilizadas como indicadores para el diseño y consolidación de la propuesta didáctica.

A partir de todo lo anterior y luego de finalizar la fase de diagnóstico se procedió al diseño de una propuesta didáctica que contribuyera al desarrollo del pensamiento espacial y la competencia matemática plantear y resolver problemas. Para ello se establecieron los referentes teóricos y metodológicos que ofrecieron el sustento y validez a la propuesta de mejoramiento; así mismo, en el registro de antecedentes como en el desarrollo de las categorías de análisis (marco teórico) se describió e interpretó la utilidad de la geometría dinámica como mediación en el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes y no como un simple elemento motivacional en el aprendizaje, contribuyendo así al esfuerzo de reflexión crítica que la comunidad de educación matemática debe realizar para evitar las decisiones fundamentadas únicamente en la presión social o la moda (Acosta, 2010); luego se procedió a la construcción de acuerdo con los referentes a la fenomenología histórica y didáctica de los cuadriláteros.

Contribuciones Teóricas.

Los resultados de esta investigación relacionados con los referentes del contexto internacional y nacional que dan cuenta del currículo propuesto en relación con los establecidos por la Institución Educativa y su currículo desarrollado, permiten consolidar una ruta de trabajo para el comité de área de matemáticas que conlleve a actualizar y consolidar la estructura curricular de esta asignatura.

Se realizó una aproximación al análisis de contenido del objeto matemático de estudio, en el que se incluyeron la multiplicidad de significados de los cuadriláteros. En ese sentido, se logró un alcance significativo en el desarrollo de la fenomenología histórica y didáctica de los cuadriláteros, la cual sirvió como fundamento en las actividades diseñadas durante la propuesta didáctica y en la que se tuvo en cuenta los fenómenos que organizan al objeto matemático y los que se puede extender posteriormente.

La propuesta didáctica como una articulación entre diferentes teorías: los niveles y fases de aprendizaje según el modelo de Van Hiele, los sistemas semióticos de representación desde Duval y la forma de entender la clase de matemáticas propuesta por Bishop con un elemento adicional, el programa de geometría dinámica. Consideramos es una contribución de carácter teórico la cual favorece el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes y permite potenciar sus niveles de desarrollo. Las actividades de la propuesta didáctica han sido intencionales en cuanto ayudan a generar constantes preguntas en los estudiantes en una interacción con sus propios compañeros y el profesor en la negociación de significados.

Contribuciones Metodológicas.

La variedad de significados de un objeto matemático en particular como resultado de su análisis fenomenológico, que como elemento adicional contribuye a encontrar familiares e interesantes las matemáticas a los estudiantes y, así poder hablar en términos de construcción de significados.

La importancia de entender la estructura curricular del área de matemáticas no como un listado de contenidos sino, a partir de la construcción de propuestas didácticas transversales, es decir, que al abordar un objeto matemático se incluyan muchos otros y dinamizar los proceso de enseñanza y aprendizaje en términos de tiempo. Por tanto se contribuye a los comités de área que como empresa conjunta reflexiona y planifica los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Una contribución al conocimiento de la Didáctica de las Matemáticas, puesto que el profesor en su rol de investigador puede interpretar y adaptar los resultados de este estudio a su contexto específico y a los problemas que se articulan en ese contexto.

Recomendaciones.

Que desde el comité de área de matemáticas de las diferentes instituciones educativas se realice la articulación de las políticas internacionales y nacionales en didáctica apoyados en los resultados de esta investigación y sin desconocer el contexto educativo, todo ello con el propósito de consolidar y estar a la vanguardia en los procesos de enseñanza y aprendizaje del área.

Es importante que los profesores de matemáticas que orientan geometría, reconozcan el tipo de dificultades a las que se puedan enfrentar sus estudiantes a la hora de realizar el estudio de cada uno de los objetos matemáticos, y de esta manera reconocer diversas estrategias que permitan un apoyo eficaz y aportes significativos en la superación de dichas falencias.

Con el propósito de enriquecer los significados del objeto matemático y diseñar actividades significativas para el estudiante que involucren preferiblemente los contextos socioeconómicos propios de la región, se recomienda a los profesores realizar un análisis de contenido riguroso de los cuadriláteros o del objeto matemático que se quiera abordar a la luz de la propuesta didáctica que se hace en esta investigación.

En el diseño de la propuesta didáctica se empleó un software de geometría dinámica. En ese sentido se recomienda el diseño y la implementación de un taller de entrada a la herramienta computacional.

Que la institución educativa José Eustasio Rivera asuma la institucionalización de la propuesta como una posibilidad en el mejoramiento de los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes en torno a los cuadriláteros. Se considera importante la vinculación de profesores y estudiantes en la implementación de la propuesta y en la proyección de manera transversal del uso de la herramienta computacional en el aula de matemáticas.

Proyecciones.

Considero que con esta investigación se han establecido pautas de tipo conceptual y metodológico en torno a la propuesta didáctica en el estudio de los cuadriláteros. Lo anterior determina futuras investigaciones en relación con la implementación y evaluación práctica de la propuesta que aquí se formula.

Así mismo, se deja abierta la posibilidad para desarrollar investigaciones similares que involucren el desarrollo de cualquier otro tipo de pensamiento y competencia matemática a partir de esta propuesta didáctica, y así, pensar en la institucionalización de esta, como referente didáctico para la enseñanza de las matemáticas en Colombia.

REFERENCIAS

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMTRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf

Bishop, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación. Colombia.

Bishop, A., Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education. pp. 309-365. Dordrecht: D. Reidel.

Burger, W., Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 17 n° 1, pp. 31-48.

De Villiers, M. (1994), The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. For the Learning of Mathematics, Vol 14, No.1 , pp. 11- 18.

D’Amore, B. (2006). Didáctica de la matemática. Cooperativa editorial magisterio: Bogotá.

D'Amore, B., Fandiño, M., Godino, J. (2008). Competencias y matemática. Cooperativa editorial magisterio: Bogotá.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática

Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el modelo de Van Hiele. Revista Sigma. Número 28, pp. 33-57. Recuperado de www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_28/5_test_geometrico.pdf.

Godino, J., Batanero C., Font V. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje para maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros

Gomez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Tesis doctoral. España.

Huerta, P. (1996). Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX y a finales del siglo XX, ¿qué ha cambiado. Revista Suma. Número 21, pp. 55-62.

INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. [ICFES]. (2007). Fundamentación conceptual área de matemáticas. Grupo de procesos editoriales ICFES: Bogotá.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.), Teoría y práctica en educación matemática (colección "Ciencias de la Educación" n° 4) (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

Jaime, A., Chapa, F., y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. Revista Épsilon. Número 23, pp. 49-62.

Jaime, A., (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. (Tesis doctoral, Universidad de Valencia). Recuperado de www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

JICK, T. D. (1979): "Mixing Qualitative and Quantitative Methods: Triangulation in action". Administrative Science Quarterly. Vol. 24. Qualitative Methodology. pp. 602-610.

Llleras, E. (2002). Las comunidades de aprendizaje como ámbitos de construcción de mundo. Recuperado de www.teso.uniandes.edu.co/Las%20comunidades%20de%20aprendizaje.pdf

Marcos, G., (2008). Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo. Tesis doctoral. Universidad de la Rioja. Recuperado de www.dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_tesis?codigo=17820&orden=0

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN] (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Enlace Editores Ltda: Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN] (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Bogotá: Creamos Alternativas.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Enlace Editores Ltda: Bogotá.

Moriena, S., Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. Educación Matemática, vol. 15, No. 001, pp. 5-19.

OCDE. (2004). Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, lectura, Ciencias y Solución de problemas: Paris.

OCDE. (2006). PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. Fundación Santillana: España.

Renzulli, F., y Scaglia, S. (2006). Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de egb3 y futuros profesores de nivel inicial. Educación matemática. Recuperado de www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_22/22_2_renzu1.pdf

Rico, L. (1990). Investigación sobre errores de aprendizaje en educación matemática. España: Universidad de Granada.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Universidad de Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2000). Sobre la Noción de Representación y comprensión en la investigación en educación matemáticas. Actas del IV Simposio de la SEIEM, pp. 1- 14.

Rico, L., Lupiáñez, J. (2008). Competencia matemática desde una perspectiva curricular. España: Alianza Editorial.

Usiskin, Z. (1982), Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry. Universidad de Chicago. Recuperado de http://ucsmp.uchicago.edu/Van_Hiele_Levels.pdf.

Zabala, A. & Arnau, L. (2007). 11 ideas clave. Cómo aprender y enseñar competencias. Graó: Barcelona.

ANEXO 1.

ACTIVIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

Respetado estudiante:

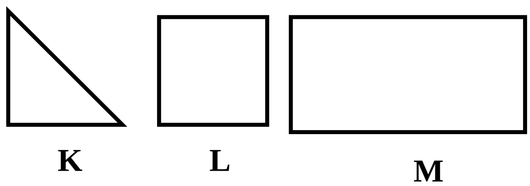
El objetivo de estos ejercicios es observar los conocimientos que usted posee en el área de geometría, específicamente en el tema de cuadriláteros. No es objeto de calificación para el área sino de valoración y análisis con fines científicos en el marco de la investigación. La institución se propone fortalecer un proyecto de investigación que se adelanta actualmente para contribuir al desarrollo del pensamiento espacial y las competencias matemáticas en los estudiantes de grado 7°, a partir del estudio de los cuadriláteros y el uso de un programa computacional, por ello su participación es muy importante.

Comedidamente le solicitamos responda con sinceridad y responsabilidad las preguntas que aparecen a continuación. La información que nos proporcione será manejada en forma privada e institucional. No es necesario que firme.

EN CADA UNA DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES, MARQUE CON UNA X LA RESPUESTA QUE CONSIEDERE CORRECTA.

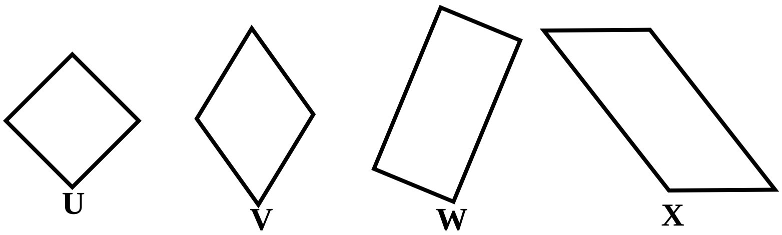
CUÁL DE LAS SIGUIENTES FIGURAS SON CUADRADOS.

Solamente K.
Solamente L.
Solamente M.
Solamente L y M.
Todos son cuadrados.



CUÁL DE LAS SIGUIENTES FIGURAS ES UN ROMBO.

Solamente W y X.
Solamente V.
Solamente U.
Solamente U y V.
Solamente V y W.



CUÁL DE LAS SIGUIENTES FIGURAS SON RECTÁNGULOS.

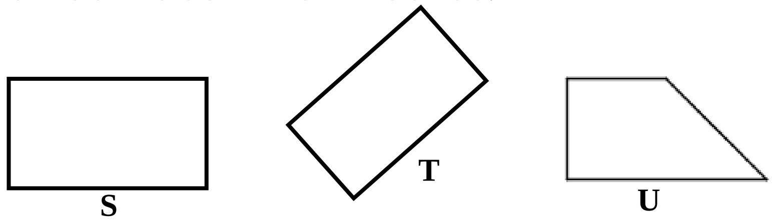
Solamente S.

Solamente T.

Solamente S y T.

Solamente S y U.

Todos son rectángulos.



CUÁL DE LAS SIGUIENTES FIGURAS SON CUADRADOS.

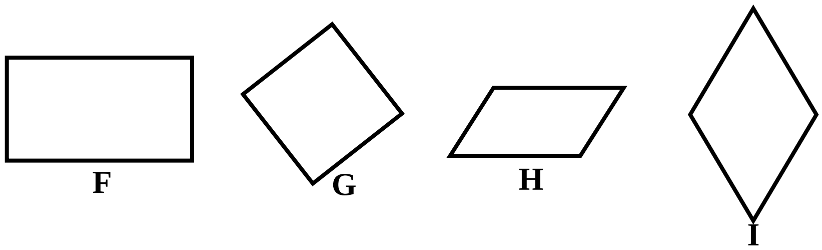
Ninguno es cuadrado.

Solamente G.

Solamente F y G.

Solamente G e I.

Todos son cuadrados.



CUÁL DE LAS SIGUIENTES FIGURAS SON PARALELOGRAMOS.

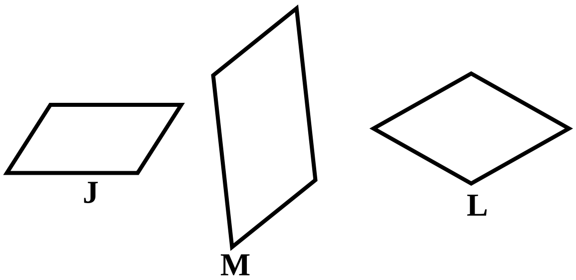
Solamente J.

Solamente L.

Solamente J y M.

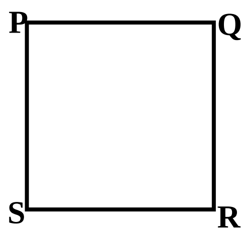
Ninguno es paralelogramo.

Todos son paralelogramos.



PQRS ES UN CUADRADO.

CUÁL DE LAS SIGUIENTE OPCIONES ES VERDADERA EN TODO CUADRADO.



los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{RS}$ tienen la misma longitud.

Los segmentos $\overline{QS}$ y $\overline{PR}$ son perpendiculares.

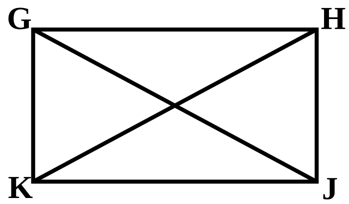
Los segmentos$\overline{PS}$ y $\overline{QR}$ son perpendiculares.

los segmentos $\overline{PS}$ y $\overline{QS}$ tienen la misma longitud.

El ángulo Q es más grande que el ángulo R.

EN UN RECTÁNGULO GHKJ, los segmentos $\overline{GJ}$ Y $\overline{HK}$ SON LAS DIAGONALES.

DE LAS OPCIONES (A) a (D) CUÁL NO ES VERDADERA EN TODO RECTÁNGULO.



Hay 4 ángulos rectos.

Hay 4 lados.

Las diagonales tienen la misma longitud.

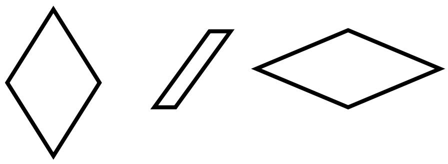
Los lados opuestos tienen la misma longitud.

Todas las opciones (A) a (D) son verdaderas en todo rectángulo.

UN ROMBO ES UNA FIGURA DE 4 LADOS CON TODOS LOS LADOS DE IGUAL LONGITUD

AQUÍ HAY 3 EJEMPLOS.

¿DE LAS OPCIONES (A) a (D) CUÁL NO ES VERDADERA EN TODO ROMBO?



Las 2 diagonales tienen la misma longitud.

Cada diagonal biseca 2 ángulos del rombo.

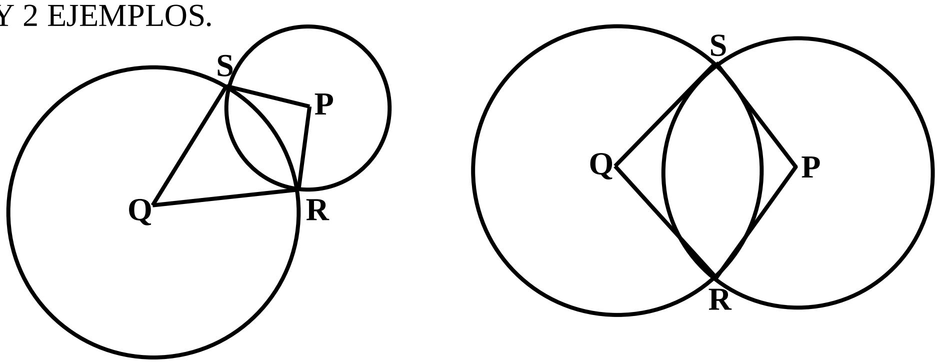
Las 2 diagonales son perpendiculares.

Los ángulos opuestos tienen la misma medida.

Todas las opciones (A) A (D) son verdaderas en todo rombo.

DOS CÍRCULOS CON CENTRO P Y Q SE INTERSECAN EN R Y S PARA FORMAR UNA FIGURA DE 4 LADOS PRQS.

AQUÍ HAY 2 EJEMPLOS.



¿DE LAS OPCIONES (A) A (D) NO ES SIEMPRE VERDADERA?

PRQS tendrá dos pares de lados de igual longitud.

PRQS tendrá al menos 2 ángulos de igual medida.

las rectas PQ y RS serán perpendiculares.

Los ángulos P y Q tendrán la misma medida

Todas las opciones (A) A (D) son verdaderas.

CUÁL DE ESTOS PUEDEN SER LLAMADOS RECTÁNGULOS.

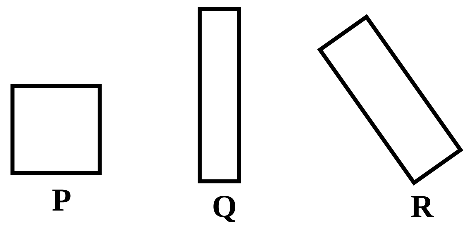
Todos.

Sólo Q.

Sólo R.

Solamente P y Q.

Solamente Q y R.



DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES, ¿CUÁL ES LA OPCIÓN VERDADERA?

Todas las propiedades de los rectángulos son propiedades de los cuadrados.

Todas las propiedades de los cuadrados son propiedades de los rectángulos.

Todas las propiedades de los rectángulos son propiedades de todos los paralelogramos.

Todas las propiedades de los cuadrados son propiedades de todos los paralelogramos.

Ninguna de las opciones.

¿QUE TIENEN TODOS LOS RECTÁNGULOS QUE ALGUNOS PARALELOGRAMOS NO TIENEN?

Lados opuestos iguales.

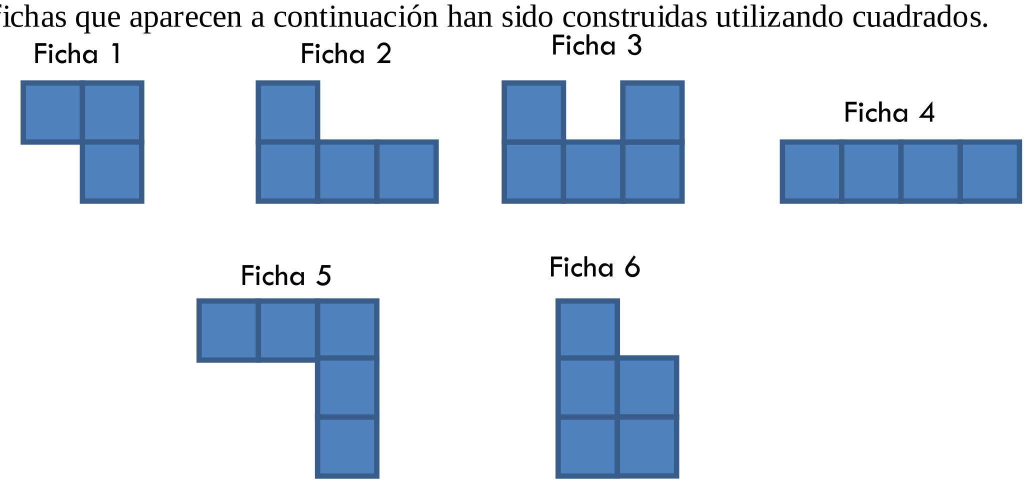
Diagonales iguales.

Lados opuestos paralelos.

Ángulos opuestos iguales.

Ninguna de las opciones.

Las fichas que aparecen a continuación han sido construidas utilizando cuadrados.



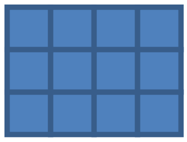
¿Qué fichas debo utilizar para formar el siguiente rectángulo?

Fichas 1, 2 y 6

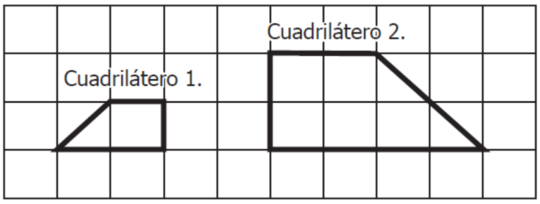
Fichas 3, 4 y 5

Fichas 6, 5 y 4

Fichas 1, 2 y 4



Observa los cuadriláteros 1 y 2 dibujados en la siguiente cuadrícula:



Los cuadriláteros son semejantes porque

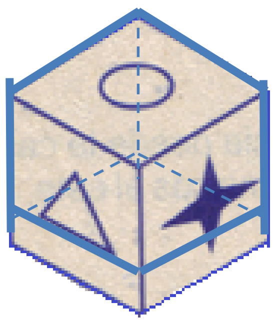
Tienen diferente perímetro pero sus áreas son iguales.

Tienen el mismo perímetro y sus áreas son diferentes.

Sus lados correspondientes son congruentes y sus ángulos correspondientes son proporcionales.

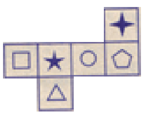
Sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.

Isabela está jugando con un cubo, el cual tiene diferentes figuras en sus caras como se muestra en la ilustración.

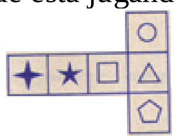


La figura con la que se puede construir el cubo con el que está jugando Isabela es:

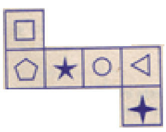
A.



C.



B.



D.